NEAD – Núcleo de Educação a Distância

COLIMAT – Coordenadoria do Curso de Licenciatura em Matemática

TCC – Trabalho de Conclusão de Curso

A Diferencial de uma Função e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso elaborado como um dos requisitos para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática da UFSJ.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila
Orientanda: Ivone Silva Elias

São João del-Rei, Junho de 2016

IVONE SILVA ELIAS

A DIFERENCIAL DE UMA FUNÇÃO E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática a Distância, da Universidade Federal de São João Del-Rei.

Os componentes da banca de avaliação, abaixo identificados, consideram este trabalho aprovado.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. (Jorge Andrés Julca Avila)
(UFSJ)

____

Prof.º Dr. (José Angel Dávalos Chuquioma)
(UFSJ)

Data da aprovação: São João del-Rei, ____ de __________________ de _____.

Dedico este trabalho de conclusão à minha mãe (in memoriam) que me apoiou ao início desta licenciatura, ao meu esposo e meus familiares, que incentivaram nos momentos em que desanimei; aos meus amigos do curso, juntos lutamos em busca de mais uma conquista; e aos meus alunos que ao longo do curso despertaram em mim cada vez mais o comprometimento em ser professora.

AGRADECIMENTOS

Eu agradeço primeiramente à Deus que preparou esta licenciatura, assim como me proporcionou forças e fé quando não tinha. Agradeço a tutora presencial Eliane Maria Miola, que auxiliou durante todo o curso com tanta dedicação; a tutora Paola Tavares pelo apoio e dedicação; ao meu orientador Dr. Jorge Andrés Julca Avila, por sua dedicação; aos meus colegas do curso, muito obrigada pelo apoio; a equipe da E.E. Vereador Antonio Comar, onde desenvolvi meus trabalhos de estágio; aos meus familiares; ao meu querido esposo que me apoiou e não me deixou desistir; à minha querida mãe (*in memoria*) por sempre me apoiar a buscar os meus sonhos; aos alunos para os quais lecionei, de alguma forma, me ensinaram muito e nos instantes em que não queria mais, eles me fizeram compreender o motivo de ter escolhido esta profissão.

RESUMO

Um dos conceitos importantes da matemática do ensino superior é a Diferencial de uma Função, que por sua vez, é pouco abordado durante o ensino. Quando se trabalha com funções reais, o estudo da diferencial aparece após a introdução de reta tangente, no caso de funções de uma variável, e depois, do plano tangente, no caso de funções de duas variáveis. A diferencial de uma função vai aproximar, de forma linear, a variação da função quando se desloca de um ponto a outro. Neste trabalho estuda-se a diferencial de uma função real de variável real, tendo em consideração sua dedução, interpretação geométrica, propriedades e aplicações.

Palavras-chave: Função, Limite, Continuidade, Derivada, Reta Tangente, Aproximação Linear e Diferencial de uma Função.

ABSTRACT

One of the important concepts of higher education mathematics is the differential of a function, which in turn, is rarely addressed during the undergraduate courses. When working with real functions, the study of differential appears after the introduction of the tangent line, in the case of functions of one variable, and then, the tangent plane in case of two-variable functions. The differential of a function will approach, linearly, the variation of function when you move from one point to another. In this work we study the differential of a real function of real variable, taking into account your deduction, geometric interpretation, properties and applications.

Keywords: Function, Limit, Continuity, Derivative, Tangent Line, Linear Approximation and differential of a function.

SUMÁRIO

1. Introdução

O *cálculo* faz parte da matemática básica do ensino superior cujo estudo é, principalmente, através da álgebra e da geometria. O cálculo inicia-se com uns dos conceitos mais importantes da matemática: *o limite de uma função*. A partir disso estudam-se derivadas e integrais de uma função, para posteriormente poder aplicá-las em diversas áreas da ciência e das engenharias, principalmente.

Sobre a origem do cálculo não se pode definir com exatidão, porém há indícios que tenha se iniciado, na Grécia Antiga, e teve como um dos seus precursores Eudóxio, através do "Método de exaustão". O método tem como proposição, a subtração de uma parte não menor que a metade de uma grandeza, e do restante outra parte não menor que sua metade, e assim por diante, numa determinada etapa do processo chega-se a uma grandeza menor que qualquer outra da mesma espécie fixada a priori (IEZZI et. al, 2005).

Arquimedes foi também um precursor do Cálculo, estudou muito o método de Eudóxio em seu livro *A quadratura da parábola*; definindo certas figuras planas envolvidas como somas dos infinitos de segmentos de reta.

A diferenciação de uma função, tópico ao qual este trabalho será desenvolvido, teve origem através de problemas relacionados a traçados de tangentes a curvas, mais tarde estudada e desenvolvida por Newton, com o Método dos Fluxos, e por Leibniz, onde se preocupou em estabelecer notações para o estudo da mesma. Estes são considerados criadores do cálculo em geral, porém há outros precursores como Kepler e Fermat que, também, contribuíram com o seu desenvolvimento.

Neste trabalho deduziremos a diferencial de uma função de uma variável, analisaremos e interpretaremos geometricamente, assim como também, estudaremos suas aplicações.

De forma mais específica, este trabalho, desenvolve-se em quatro capítulos: O Capítulo 1 aborda os Resultados Preliminares. O Capítulo 2 aborda a Função Real de uma Variável, com as seguintes seções: Limite e Continuidade de uma Função, Diferenciabilidade, Reta Tangente. O Capítulo 3 aborda a Diferencial de uma Função, com as seguintes seções: Aproximação Linear, Dedução da Diferencial de uma Função, Interpretação Geométrica, Propriedades da Diferencial e Aplicação da Diferencial. Finalmente, o Capítulo 5, onde é abordada as Considerações Finais.

2. Resultados Preliminares

Para a compreensão dois conceitos principais que estudaremos nos capítulos finais serão necessários abordar alguns resultados do cálculo básico.

2.1. Função Real de uma Variável

O conceito de função é simples, pois é a correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo a seguinte propriedade: "a cada elemento do conjunto de partida lhe corresponde um único elemento no conjunto de chegada". Observe que essa definição é muito geral. Quando esses conjuntos apresentam ou "ganham" propriedades: algébricas ou topológicas, as funções passam a chamar-se: Aplicações, Transformações e até Operadores. É comum que funções, definidas nos conjuntos dos números reais, continuem com esse mesmo nome.

Definição 2.1 (Função Real de uma Variável) Sejam os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$. f é uma função de X em Y, denotada por $f : X \to Y$, se a cada elemento $x \in X$ corresponde-lhe um único elemento $y \in Y$.

Simbolicamente,

$$\forall x \in X,\ \exists!\ y \in Y;\ \ f(x) = y \tag{1}$$

Observação 2.1

i. O conjunto X é chamado de *domínio da função* f, e denota-se D_f.
ii. O conjunto Y é chamado de *imagem da função* f, e denota-se $\operatorname{Im} f$.

Definição 2.2 (Domínio de uma Função) Sejam os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to Y$. Definimos o domínio de f por

$$\mathrm{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : \exists!\, y \in Y;\ y = f(x)\}$$

Definição 2.3 (Imagem de uma Função) Sejam os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to Y$. Definimos a Imagem de f por

$$\mathrm{Im}_f = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathrm{D}_f;\ f(x) = y\}$$

Teorema 2.1. *Se f é uma função de X em Y então*

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ \ x_1 = x_2 \ \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Prova. Sejam $x_1, x_2 \in X$ então pela definição de função $\exists! y_1, y_2 \in Y$ tais que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Como $x_1 = x_2$ então $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$.

Para uma melhor compreensão do comportamento de uma função, isto é, como muda $f(x)$ ao variar x, utilizamos o gráfico de f.

Definição 2.4 (Gráfico de uma Função) Define-se o gráfico de uma função f, denotado por G_f, pelo seguinte conjunto:

$$\mathrm{G}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D_f \text{ e } y = f(x)\} \tag{2}$$

Exemplo 2.1 O gráfico da função afim:

$$y = a_0 + a_1 x,\ \ a_1 \neq 0 \tag{3}$$

é uma reta que corta o eixo y no ponto $(0, a_0)$, isto é,

$$\mathrm{G}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \text{ e } y = a_0 + a_1 x,\ \ a_1 \neq 0\}$$

Observação 2.2 No Exemplo 1, quando $a_0 = 0$ dizemos que a função (3) é linear.

Exercício 2.1 Encontre o domínio, imagem e esboce o gráfico de alguma função exponencial.

Solução. Consideremos a função exponencial de base e, onde e é a base do logaritmo natural. Ela é definida por

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = e^x \end{aligned}$$

Note que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe um único valor $f(x) = e^x$, logo $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$. Por outo lado, os valores que a função toma são todos positivos, isto é, $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathrm{D}_f$. Assim, $\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}^+$. Para esboçar o gráfico precisamos de alguns valores de f. Na Tabela 1 apresentamos alguns valores de f para alguns valores de x. Assim,

$$\mathrm{G}_f = \{\ldots, (-2,\ 0{,}1353\ldots),\ (-1,\ 0{,}3678\ldots),\ (0,1),\ (1,\ 2{,}7182\ldots),\ (2,\ 7{,}3890\ldots),\ \ldots\}$$

Em Figura 1 esboçamos o gráfico de f. Observamos que quando x tende a menos infinito a função tende a zero, e quando, x tende a mais infinito, a função tende a mais infinito.

Tabela 1. Alguns valores da função exponencial $f(x) = e^x$.

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$f(x) = e^x$	$\cdots$	$0{,}1353\ldots$	$0{,}3678\ldots$	1	$2{,}7182\ldots$	$7{,}3890\ldots$	$\cdots$

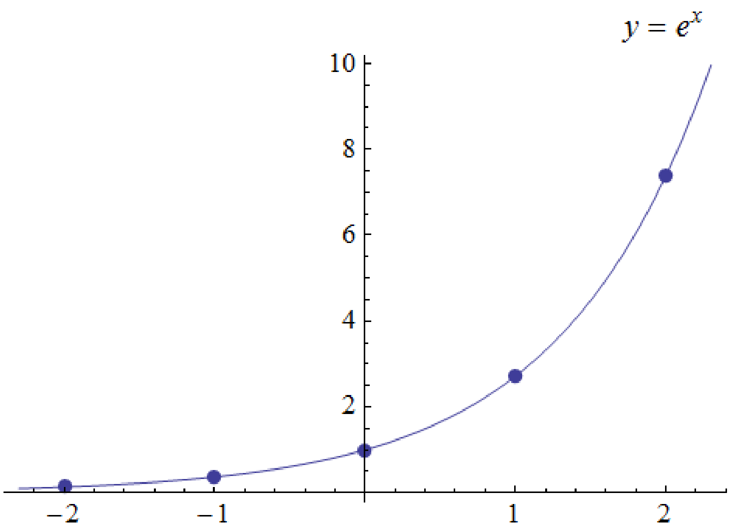

Figura 1. Gráfico da função $f(x) = e^x$.

Para poder explicar melhor o comportamento da função quando x tende a algum ponto, precisamos introduzir o conceito de limite e continuidade.

2.2. Limite e Continuidade de uma Função

Dois grandes conceitos da matemática limite e continuidade serão definidos a seguir.

Definição 2.5 (Ponto de Acumulação) Seja $X \subset \mathbb{R}$, dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de X, se

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap \left(X - \{x_0\} \right) \neq \varnothing$$

Definição 2.6 (Limite de uma Função) Seja $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função definida em X. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de f quando x tende a x_0 se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que, se $x \in X$ e $0 < |x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Simbolicamente,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \tag{4}$$

Teorema 2.2 Seja $f : X \to \mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de X. Então,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \tag{5}$$

Prova. Pela definição de limite, dado em (4), $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - 0| < \varepsilon$, esta última desigualdade é equivalente a $\big|\, |f(x)| - 0 \,\big| < \varepsilon$. Desse modo $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$. □

O comportamento de funções podem apresentar "saltos", nesse caso, estaremos conhecendo o conceito de continuidade de uma função.

Definição 2.7 (Continuidade de uma Função). Seja $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ um ponto de acumulação de X e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função definida em X. Dizemos que f é contínua em

x_0 se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que, se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Simbolicamente,

$$f \text{ é continua em } x_0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0;\ x \in X,\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (6)$$

Exemplo 2.2 A seguinte função $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$, definida por partes,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + \pi/2}, & -4 \le x < -\dfrac{\pi}{2} \\ -2, & x = -\dfrac{\pi}{2} \\ -\tan(x), & -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \\ 2x, & 0 \le x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ -x + 3, & 1 < x < 2 \\ -(x-3)^3 + 2, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

é contínua em todos os pontos de seu domínio, exceto, nos pontos $-\pi/2$, 1 e 2. Veja o gráfico de f na Figura 2.

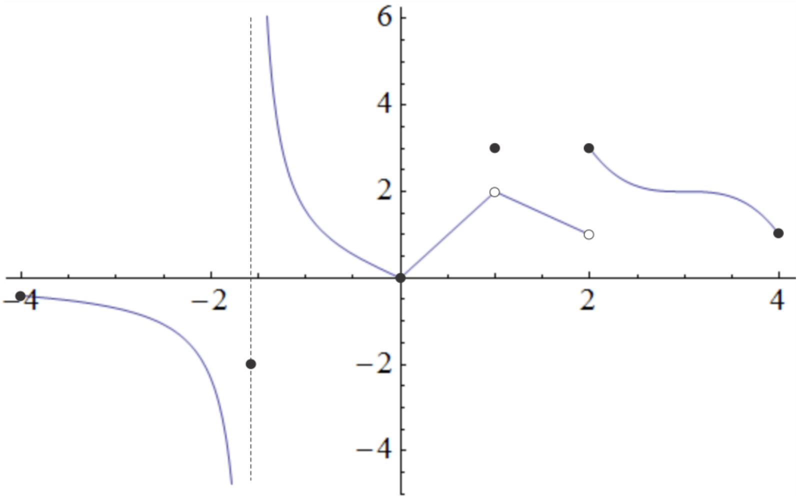

Figura 2. Descontinuidade da função f, definida por partes.

Agora estamos interessados na taxa de variação da variável dependente f em relação a variável independente x, isto é, a derivada da função de f em x.

2.3. Diferenciabilidade

Será definido o conceito de Diferenciabilidade a partir do conceito de derivada de uma função.

Definição 2.8 (Derivada de uma Função) Seja $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ um ponto de acumulação de X e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função definida em X. A derivada de f em x_0, denota-se $f'(x_0)$, é definida pelo seguinte limite,

$$f'(x_0) \; = \; \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{7}$$

É claro que, a derivada da função existirá desde que seu limite exista.

Observação 2.3

i. Se existe a derivada de f em x_0 então $f'(x_0)$ é um número real.
ii. Fazendo em (7) a mudança de variável $h = x - x_0$, temos que a derivada de f em x_0 é equivalente a

$$f'(x_0) \; = \; \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{8}$$

Definição 2.9 (Diferenciável) Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é diferenciável (ou derivável) em $x_0 \in X$ quando existe sua derivada em x_0.

Exemplo 2.3 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Essa função é diferenciável para todo $x \neq 0$, pois, é o produto de duas funções diferenciáveis (uma função polinomial e uma função trigonométrica). Porém, não é diferenciável em $x = 0$, pois o limite não existe. De fato, usando (8), temos

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \operatorname{sen}(1/h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$$

Veja o gráfico de f, na Figura 3, observe que o gráfico oscila “eternamente” quando se aproxima a zero.

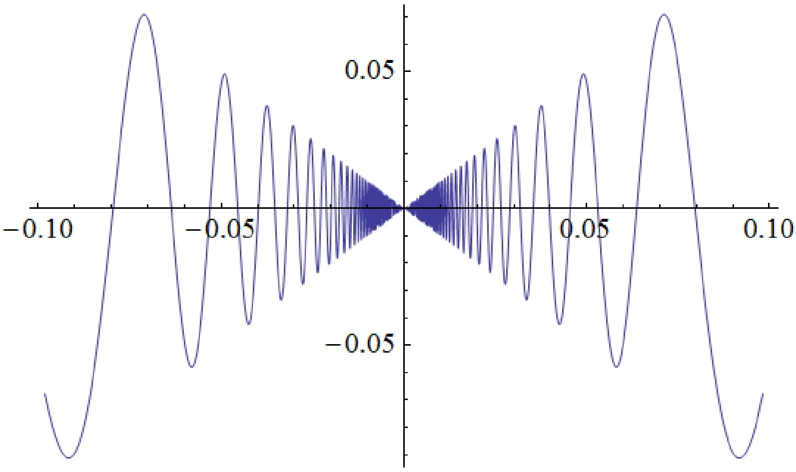

Figura 3. O gráfico da função f.

2.4. Reta Tangente

Descreveremos as equações da reta secante e a reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto.

Definição 2.10 (Reta Secante) A reta que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ do gráfico de f é chamada de Reta secante ao gráfico de f, e é denotada por $\mathcal{S}$.

Desse modo a equação da reta secante ao gráfico f é dada por

$$\mathcal{S}: \quad s = m_s(x - x_0) + f(x_0)$$

onde,

$$m_s = m_s(h) = \tan\theta(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{9}$$

é a inclinação de $\mathcal{S}$.

Definição 2.11 (Reta Tangente) A reta que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e é tangente ao gráfico de f, nesse ponto, é chamada de Reta Tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$, e é denotada por $\mathcal{T}$.

Na Figura 4 apresentamos as retas secantes e tangentes ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

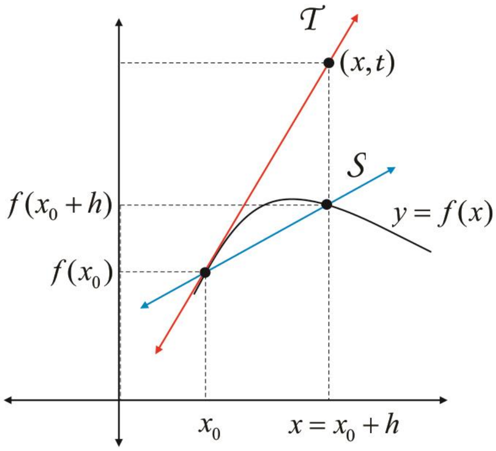

Figura 4. As retas secantes e tangentes ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Teorema 2.3 *A equação da reta tangente* $\mathcal{T}$ *é dada por*

$$\mathcal{T}: \quad t = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \tag{10}$$

Prova. Nota-se que a inclinação da reta tangente $\mathcal{T}$, denotada por m_t, seria o limite da inclinação da reta secante $\mathcal{S}$ quando h se aproxima a zero. Então, aplicando limite em (9), temos

$$m_t = \lim_{h\to 0} m_s(h) = \lim_{h\to 0} \tan\theta(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Logo, a equação da reta tangente $\mathcal{T}$ é $t = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. □

3. A Diferencial de uma Função

A seguir deduziremos a diferencial de uma função, interpretaremos geometricamente, enunciaremos algumas propriedades e, finalmente, veremos as aplicações. Foram consultadas as seguintes bibliografias ([1]-[3] e [5]-[8]).

3.1. Aproximação Linear

Desejamos aproximar valores da função $f(x)$ em um ponto $x = x_0 + h$, onde h é pequeno, mas claramente:

Suponha-se que se conhecem:

i. $\left(x_0, f(x_0)\right)$
ii. $f'(x_0)$
iii. $x = x_0 + h$, onde h é um valor pequeno.

E se deseja conhecer:

i. $f(x)$

Resposta:

Não é possível conhecer o valor exato de $f(x)$, porém, é possível conhecer um valor aproximado de $f(x)$. Essa aproximação é linear, dada por uma função afim, cujo gráfico é a equação da reta tangente ao gráfico de f que passa pelo ponto $\left(x_0, f(x_0)\right)$.

Definição 3.1 (Aproximação Linear) Dizemos que uma função $f(x)$ é aproximada linearmente pela função $\tilde{f}(x)$, se $\tilde{f}(x)$ é uma função afim.

Definição 3.2 (Erro) O erro que se comete ao aproximar $f(x)$ por $\tilde{f}(x)$ é definido por

$$e(x) = f(x) - \tilde{f}(x)$$

Observação 3.1

Dizemos que o erro tende a zero, mais rapidamente que $|x-x_0|$, quando o $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e(x)}{|x-x_0|}=0$.

Definição 3.3 Se f é diferenciável em x_0. Definimos a função afim $\ell:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por

$$\ell(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \tag{11}$$

Note que o gráfico da função $\ell(x)$ é a reta tangente ao gráfico de $f(x)$, no ponto $(x_0, f(x_0))$, cuja equação é dada por (10).

Teorema 3.1 (Aproximação Linear de f) Se f é diferenciável em x_0 então a função afim $\ell(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ aproxima linearmente a $f(x)$ com o erro tendendo a zero, mais rapidamente que $|x-x_0|$.

Prova. Se f é diferenciável em x_0 então, por (7)

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)}{x-x_0}=0 \tag{12}$$

ou, ainda,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\left[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\right]}{x-x_0}=0 \tag{13}$$

Por (11),

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \ell(x)}{x - x_0} = 0 \tag{14}$$

Seja $e(x)$ o erro que se comete ao aproximar $f(x)$ por $\ell(x)$, isto é,

$$e(x) = f(x) - \ell(x) \tag{15}$$

Substituindo (15) em (14), temos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e(x)}{x - x_0} = 0 \tag{16}$$

Então, por(5),

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e(x)}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left| \frac{e(x)}{x - x_0} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{|e(x)|}{|x - x_0|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left| \frac{e(x)}{|x - x_0|} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{e(x)}{|x - x_0|} = 0$$

Portanto, o erro tende a zero, mais rapidamente que $|x - x_0|$.

Teorema 3.2 (Unicidade) A função $\ell(x)$ é a única função afim que aproxima $f(x)$, tal que o erro $e(x)$ tendendo a zero, mais rapidamente que $|x - x_0|$.

Prova. Suponha que existe outra função afim $\overline{\ell}(x) = m_{\overline{\ell}}(x - x_0) + f(x_0)$, com $m_\ell \neq m_{\overline{\ell}}$, que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$, tal que $\lim_{x \to x_0} \frac{\overline{e}(x)}{|x - x_0|} = 0$. Por definição de erro, temos

$\overline{e}(x) = f(x) - \overline{\ell}(x) = f(x) - m_{\overline{\ell}}(x - x_0) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) - m_{\overline{\ell}}(x - x_0)$. Sem perda de generalidade podemos supor que $x > x_0$. Logo, $\frac{\overline{e}(x)}{|x - x_0|} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m_{\overline{\ell}} = 0$. Assim, tomando limite quando x tende x_0, temos $m_\ell - m_{\overline{\ell}} = 0$, ou seja, $m_\ell = m_{\overline{\ell}}$, a qual é uma contradição. Logo, a função afim $\ell(x)$ é a única.

3.2. Dedução da Diferencial de uma Função

A diferencial de uma função é introduzida, no cálculo, com a necessidade de aproximar a variação de f quando passa de um ponto a outro. Vamos explicar isto de forma mais clara.

O Teorema 3.1 pode expressar-se, de forma equivalente, como o seguinte teorema.

Teorema 3.3 Se f é diferenciável em x_0 então

$$f(x) = \ell(x) + e(x) \tag{17}$$

onde $\ell(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ e $e(x)$ é o erro, tal que,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e(x)}{|x - x_0|} = 0 \tag{18}$$

Prova. A prova deste teorema é a mesma que a demonstração do Teorema 3.1.

Como f é diferenciável em x_0, de (17), temos

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + e(x) \tag{19}$$

ou, equivalentemente,

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{20}$$

ou, ainda,

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0) \tag{21}$$

Note que o lado esquerdo de (21) é a variação de f quando passa de x_0 para x. Denotemos essa variação por Δf. Assim,

$$\Delta f \approx f'(x_0)(x - x_0) \tag{22}$$

O lado direito de (22) é a diferencial de f em x_0.

Em cálculo é comum denotar o acréscimo de x_0 a x, por

$$\Delta x = x - x_0 \tag{23}$$

Substituindo (23) em (22), temos que a diferencial de f em x_0, é dada por

$$df := f'(x_0)\Delta x \tag{24}$$

De (22) e (24), temos

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f \approx df = f'(x_0)\Delta x \tag{25}$$

Se f é diferenciável em x, a diferencial de f em x, denotada, também, por df é dada por

$$df := f'(x)dx \tag{26}$$

onde, dx é o acréscimo de x_0 a x.

A seguir, formalizaremos a diferencial de uma função.

Definição 3.4 (Diferencial de uma Função) Seja f uma função diferenciável em x. Então a diferencial de f em x, é definida por

$$df := f'(x)dx \tag{27}$$

Em (25), fazendo $x = x_0 + dx$, temos

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) = \Delta f \approx df = f'(x_0)dx \tag{28}$$

Para um x_0 qualquer, temos

$$f(x + dx) - f(x) = \Delta f \approx df = f'(x)dx \tag{29}$$

Isto é,

$$\Delta f \approx df \tag{30}$$

ou, equivalentemente,

$$f(x+dx) - f(x) \approx f'(x)dx \tag{31}$$

Agora, interpretaremos geometricamente a diferencial de uma função.

3.3. Interpretação Geométrica da Diferencial

A interpretação geométrica será para a diferencial de f em x_0. Para isto, primeiro, definamos a seguinte função.

Definição 3.5 Se f é diferenciável em x_0. Definimos a função linear $\mathscr{L}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\mathscr{L}(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x \tag{32}$$

De (28),

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \tag{33}$$

3.3.1. Primeira Interpretação Geométrica da Diferencial de uma Função

Substituindo (32) em(33), temos

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx \mathscr{L}(\Delta x) \tag{34}$$

Então, $\mathscr{L}(\Delta x)$ aproxima a variação que sofre a função f, quando passa de x_0 a x.

Observação 3.2

a) De Proposição 3.1 temos que $\mathscr{L}$ é a única transformação linear que aproxima a variação de f quando passa de x_0 para x.

3.3.2. Segunda Interpretação Geométrica da Diferencial de uma Função

De (11),

$$\ell(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Sabemos que $\ell(x_0) = f(x_0)$ e $\Delta x = x - x_0$. Assim,

$$\ell(x) - \ell(x_0) = f'(x_0)\Delta x \tag{35}$$

Substituindo (32) em (35), temos

$$\ell(x) - \ell(x_0) = \mathscr{L}(\Delta x) \tag{36}$$

Então, $\mathscr{L}(\Delta x)$ é a variação que sofre a função afim ℓ, quando passa de x_0 a x.

Na Figura 5 apresentamos as duas ideais da interpretação geométrica da diferencial de uma função.

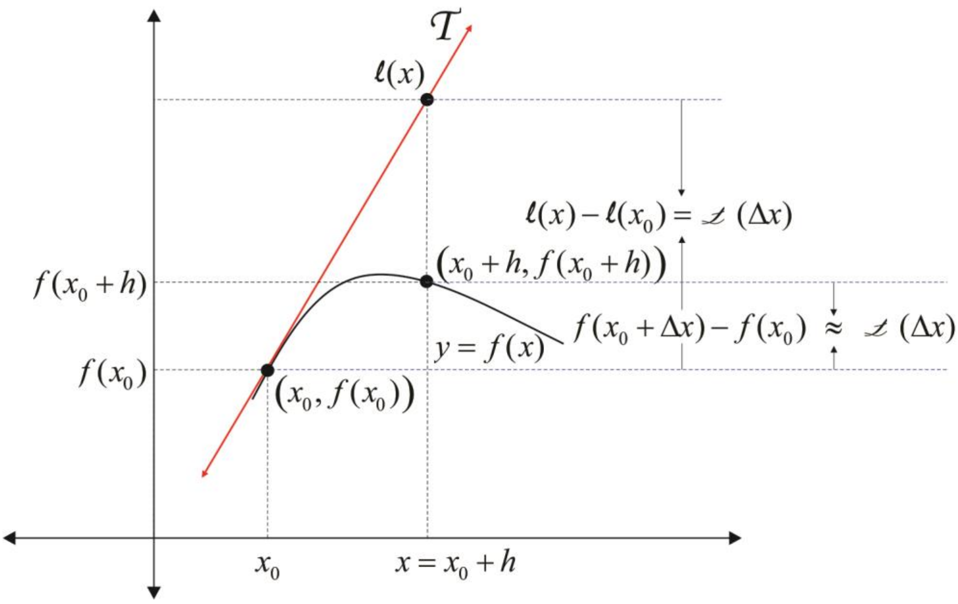

Figura 3. Interpretação geométrica da diferencial de uma função.

3.4. Propriedades da Diferencial

Assim como a derivada de uma função, a diferencial de uma função, também, satisfaz propriedades.

Teorema 3.4 Sejam f e g funções reais diferenciáveis e $k \in \mathbb{R}$. Então,

a) $d(f \pm g) = df \pm dg$

b) $d(kf) = kdf$

c) $d(fg) = (df)g + f(dg)$

d) $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{(df)g - f(dg)}{g^2}, \quad g(x) \neq 0$

Prova.

a) $d(f+g) = (f+g)'(x)dx = \left[f'(x)+g'(x)\right]dx = f'(x)dx + g'(x)dx = df + dg$

b) $$\begin{aligned} d(fg) &= (fg)'(x)dx = \left[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right]dx = \left(f'(x)dx\right)g(x) + f(x)\left(g'(x)dx\right) \\ &= (df)g(x) + f(x)(dg) = (df)g + f(dg) \end{aligned}$$

As outras demonstrações são de forma analoga.

Teorema 3.5 (Regra da Cadeia) Seja $f = f(u)$ e $u = u(x)$ funções diferenciaveis. Então,

$$df = f'\left(u(x)\right)u'(x)dx \tag{37}$$

Prova. $df = f'(u)du = f'\left(u(x)\right)u'(x)dx$

Teorema 3.6 (Diferencial de Ordem Superior)

$$df^n = f^{(n)}(x)(dx)^n \tag{38}$$

Prova. Demonstraremos por Indução Finita.

i. $n = 1$:

$$df^1 = df = f'(x)dx = f^{(1)}(x)(dx)^1$$

ii. $n = k$: *(hipótese Indutiva)*

$$df^k = f^{(k)}(x)(dx)^k$$

iii. $n = k+1$:

$$\begin{aligned} df^{k+1} &= d(df^k) = d\left[f^{(k)}(x)(dx)^k \right] = \left[f^{(k)}(dx)^k \right]'(x)dx \\ &= \left[f^{(k)} \right]'(x)(dx)^k dx = f^{(k+1)}(x)(dx)^{k+1} \end{aligned}$$

3.5. Aplicação da Diferencial

A diferencial como qualquer outro conceito matemático tem fundamental importância em nosso cotidiano, porém não há carências em pesquisas sobre seus fundamentos e suas aplicações. E é muito importante demonstrar tais aplicações, sobre a diferencial, bem como utilizá-la.

A aplicação ocorre como resultado da evolução e desenvolvimento desses conceitos. O mesmo acontece com o cálculo de derivadas que tem importância especial em virtude das inúmeras aplicações em vários campos das ciências, tais como: problemas da física, biologia, química, modelagem matemática, arquitetura, geologia, engenharia e economia (SANTANA, 2010).

Exercício 3.1 Use a diferencial de uma função para estimar o valor de $\sqrt{36,1}$.

Solução. Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Note que f é diferenciável para todo $x > 0$. Então, de (28), temos

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Seja $x_0 = 36$ e $\Delta x = 0,1$ e $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Assim,

$$\sqrt{36{,}1}=\sqrt{36+0{,}1}\approx\sqrt{36}\ +\frac{1}{2\sqrt{36}}(0{,}1)=6+\frac{(0{,}1)}{12}=6{,}0083333...$$

O resultado exato de $\sqrt{36{,}1}=6{,}0083275...$

Exercício 3.2 Use a diferencial de uma função para estimar o valor de $\tan(0{,}1)$.

Solução. Seja $f(x)=\tan x$. Note que f é diferenciável para todo $x\in(-\pi/2,\pi/2)$. Então, de (28), temos

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)\ +f'(x_0)\Delta x$$

Seja $x_0=0$ e $\Delta x=0{,}1$ e $f'(x)=\sec^2 x$. Assim,

$$\tan(0{,}1)=\tan(0+0{,}1)\approx\tan 0+\sec^2 0\,(0{,}1)=0+1^2(0{,}1)=0{,}1$$

O resultado exato de $\tan(0{,}1)=0{,}00174533...$

Exercício 3.3 Mostre que para h suficientemente pequeno vale a aproximação

$$\sqrt{x^2+h}\approx x+\frac{h}{2x}$$

Solução. Seja $f(u)=\sqrt{u},\ \ u=u(x)=x^2$. A função f é diferenciável para todo u positivo, e a função u é diferenciável para todo x real. Para $x>0$, calculamos,

$$f'(u)=\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{1}{2\sqrt{x^2}}=\frac{1}{2x}$$

Segundo (29),

$$f(u+\Delta u)-f(u)\ \approx\ f'(u)\Delta u$$

Então,

$$\sqrt{u+\Delta u}-\sqrt{u} \;\approx\; f'(u)\Delta u$$

Denotemos $\Delta u = h$. Assim,

$$\sqrt{x^2+h}-\sqrt{x^2} \;\approx\; \frac{1}{2x}h \tag{39}$$

ou, equivalentemente,

$$\sqrt{x^2+h} \approx x+\frac{h}{2x}$$

Exercício 3.4 Mostre que aplicando uma fina camada de tinta de espessura h à superfície de uma esfera de superfície S, o volume da esfera aumenta de aproximadamente Sh.

Solução. A fórmula do volume de uma esfera de raio r é $V=\frac{4}{3}\pi r^3$. Note que esse volume pode ser considerado como uma função que depende do raio, isto é, $V=V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$. Note que esta função é diferenciável. Assim, $V'(r)=4\pi r^2$. Por outro lado, a superfície da esfera é dada por $S=4\pi r^2$. Também, há um acréscimo Δr do raio da esfera quando é aplicada uma camada de tinta. Logo, $\Delta r = h$. Do mesmo modo há uma variação do volume da esfera, de seu estado sem a camada de tinta para o estado com camada de tinta. Matematicamente, essa variação é aproximada pela diferencial da função V. Assim, de (31), temos

$$V(r+\Delta r)-V(r) \;\approx\; V'(r)\Delta r \tag{40}$$

Assim, (40), é

$$V(r+\Delta r)-V(r) \;\approx\; V'(r)\Delta r = (4\pi r^2)h = Sh$$

Desse modo temos apresentado algumas aplicações da diferencial de uma função.

4. Considerações Finais

O estudo da diferencial de uma função real de uma variável proporcionou um aprendizado gratificante, conhecimento, bem como compreender como elas evoluíram ao longo do tempo, de início apenas com um estudo simples de limite, como o paradoxo de Zenão, e crescendo de forma a chegar em um limite particular, estudando a variação da função de um ponto a outro.

Deve-se observar que o estudo do cálculo inicia-se de forma muito sutil e simples desde a educação básica, em física, e a própria matemática, na velocidade, aceleração, no estudo da equação da reta, bem como outros elementos da geometria analítica. Porém ao estudarmos as diferenciais, observamos esses contextos de forma mais aprofundada.

A finalidade desse trabalho, desde um ponto de vista educacional para o ensino superior, é alertar aos professores para que tome, em consideração, esse tópico de muita importância quando se queira aproximar, de forma linear, valores de uma função, unicamente conhecendo: (a) um ponto (b) a derivada nesse ponto. É claro que o conceito de diferencial de uma função é estendido para aproximações de segunda, terceira e até *n*- ésima ordem, com a vinda do Polinômio de Taylor.

Referências Bibliográficas

[01] CARNEIRO, Carlos E. I.; PRADO, Carmem P. C.; SALINAS Silvio R. A. ***Introdução elementar às técnicas do cálculo diferencial e integral.*** 2ª ed. São Paulo: Instituto de Física USP, 2011.

[02] GUIDORIZZI, Hamilton L. ***Um curso de cálculo v. 1***. 5ªed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[03] GUIDORIZZI, Hamilton L. ***Um curso de cálculo v. 2***. 5ªed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[04] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson J.; ***Fundamentos da Matemática elementar: limites, derivadas e noções de integral.*** 6ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

[05] MUNIZ, Neto A. C. ***Fundamentos do Cálculo.*** 1ª ed. São SBM, PROFMAT, 2015.

[06] PINTO, Márcia M.; ERCOLE Grey**.** ***Introdução ao cálculo diferencial***. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2009.

[07] STEWART, J. ***Cálculo.*** Volume 1. Tradução da 6ª edição norte-americana. CENGAGE Learning™, 2010.

[08] STEWART, J. ***Cálculo.*** Volume 2. Tradução da 6ª edição norte-americana. CENGAGE Learning™, 2010.