UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI – UFSJ

NÚCLEO DE EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUANA APARECIDA TAVARES DOS SANTOS

INTERPOLAÇÃO DE FUNÇÕES E SUAS APLICAÇÕES

SÃO JOÃO DEL-REI

Junho 2016

LUANA APARECIDA TAVARES DOS SANTOS

INTERPOLAÇÃO DE FUNÇÕES E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática a Distância, da Universidade Federal de São João Del-Rei.

Orientador: Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar

SÃO JOÃO DEL-REI

Junho 2016

INTERPOLAÇÃO DE FUNÇÕES E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática a Distância, da Universidade Federal de São João Del-Rei.

Os componentes da banca de avaliação, abaixo identificados, consideram este trabalho aprovado.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof.ª Dr. (Juan Carlos Zavaleta Aguilar)

(Presidente da banca)

____

Prof.º Dr. (Lorena Mara Costa Oliveira)

(Membro da banca)

Data da aprovação: São João Del - Rei, 18 de junho de 2016.

A Deus que nos sustenta e encoraja a nunca desistir,

mesmo que pareça impossível de se conquistar.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que de alguma forma me ajudaram na conclusão deste trabalho:

A Deus, pela força e coragem durante todos os momentos e por me ajudar a nunca desistir dos meus sonhos.

A minha família, pais, irmã, marido e filha que com muito carinho e apoio não mediram esforços para que eu chegasse até aqui.

Agradeço também ao meu orientador Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar, pelo auxílio, paciência e disponibilidade, que sempre com simpatia e dedicação me forneceu todo o material para pesquisa.

A todos os professores do curso de Matemática da UFSJ, tutores à distância e presenciais que durante muito tempo contribuíram para minha formação acadêmica, aos meus e colegas, pelo incentivo e apoio constantes.

Com todos aprendi a pensar, e pensando, aprendi que cada dia, devemos viver em busca de respostas que satisfazem os nossos pensamentos.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar os principais métodos de interpolação de funções e mostrar algumas de suas aplicações. Neste contexto, os métodos de interpolação: *Lagrange*, *Newton* e *Splines* Cúbicos são abordados com algum grau de detalhe, destacando as ferramentas matemáticas necessárias para obter os polinômios de interpolação, bem como fazer uma estimativa do erro cometido. Finalmente, são discutidos as vantagens e desvantagens dos métodos em escopo.

Palavras-chave: Interpolação de Funções. Método de *Lagrange*. Método de *Newton*. Método de *Splines* Cúbicos. Erro de Interpolação.

ABSTRACT

The objective of this work is to study the main methods of the functions interpolation and show some of their applications. In this context, the *Lagrange's, Newton's* and *Splines* Cubic's methods of interpolation are approached with some level of detail, emphasizing the necessary mathematical tools to get the polynomial of interpolation and the committed mistake prediction. Finally, the advantages and disadvantages of the scope methods are argued.

Key words: Function interpolation. *Lagrange's* Method. *Newton's* Method. *Splines* Cubic's Method. Interpolation mistake.

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO

Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar esta função por uma outra função $g(x)$, escolhida convenientemente, a fim de satisfazer algumas propriedades. A função $g(x)$ é então usada em substituição à função $f(x)$.

A necessidade de se efetuar está substituição surge em diversas situações, um exemplo é quando são conhecidos apenas os valores numéricos da função para um conjunto discreto e finito de pontos e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado. Outra situação aparece quando a função em estudo tem uma expressão tal que operações como a diferenciação e integração são difíceis (ou mesmo impossíveis) de serem realizadas.

Segundo RUGGIERO e LOPES, 1997; SPERANDIO, MENDES e SILVA, 2003, métodos de interpolação são utilizados para estimar valores de uma função dentro de um intervalo conhecido.

Dados $n+1$ pontos conhecidos, então o grau do polinômio interpolado será no máximo n, a escolha do grau satisfatório dependerá do número de pontos que se pretende interpolar e da precisão que se almeja. No entanto, polinômios de grau muito elevados podem causar extrapolação. (RUGGIERO e LOPES, 1997). Por outro lado, polinômios de grau reduzido podem implicar em erros grandes de interpolação. A interpolação é aplicável na resolução de problemas físicos, computacionais, entre outros.

O objetivo do capítulo 1 é descrever a técnica do método de *Lagrange*, desenvolvido pelo matemático JOSEPH – LOUIS DE LAGRANGE (1736-1813). Também, será estudado o erro de interpolação ao aplicarmos este método e algumas aplicações deste método.

Partindo da premissa de que o polinômio de interpolação é único, porém, a forma de obter este polinômio não é única. Dessa forma, o capítulo 2 é dedicado ao estudo da interpolação de *Newton,* juntamente com a estimativa do erro de interpolação e algumas aplicações.

No capítulo 3, aborda-se a teoria básica do método de *Splines* e suas principais variantes.

Finalmente, serão analisados as principais vantagens e desvantagens dos métodos apresentados neste trabalho.

CAPÍTULO 1 – MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

1.1 – Preliminares

Antes de começar o estudo da interpolação de *Lagrange*, enuncia-se algumas definições e teoremas básicos no estudo de interpolação de funções. Começaremos com o *Teorema de Weierstrass.*

Teorema 1. Seja f uma função contínua definida no intervalo fechado e limitado $\left[a,b\right]$ e seja δ um número positivo. Então existe um polinômio $p(x)$, tal que para todo $x\in\left[a,b\right]$:

$$\left|f\left(x\right)-p\left(x\right)\right|<\delta \tag{1}$$

Este Teorema garante a existência de um polinômio p tão próximo de f quanto queiramos. Porém, nada disse sobre a maneira de como obtê-lo e nem o grau desse polinômio. Assim sendo, precisa-se de metodologias para construir eficientemente o polinômio p.

A interpolação por meio de polinômios utiliza as informações de $n+1$ pares de pontos da forma $(x_0,y_0),(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$, sendo que em alguns casos, tem-se a relação $y_i=f\left(x_i\right), i=0,1,...,n,$ onde f é uma função real. Constrói-se então, a partir desses dados, um polinômio $P\left(x\right)$ de grau no máximo *n*, tal que $y_i=P\left(x_i\right), i=0,1,...,n$.

O Teorema a seguir mostra que sendo os pontos $x_i, i=0,1,...,n$ distintos, então o polinômio de interpolação é único.

Teorema 2. Dados *n+1* pontos distintos $x_i, i=0,1,...,n$ e *n+1* valores $y_i, i=0,1,...,n$, existe um e só um polinômio $P_n\left(x\right)$, de grau menor ou igual que *n*, tal que:

$$y_i=P_n\left(x_i\right), i=0,1,...,n \tag{2}$$

Prova: Seja $P_n\left(x\right) = a_0 + a_1\, x + \ldots + a_n\, x_n$, um polinômio de grau no máximo n, com $n+1$ coeficientes $a_0, a_1,...,a_n$ a serem determinados. Assim tem-se,

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \ldots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_1^n = y_1 \\ \ldots \quad \ldots \\ a_0 + a_1x_n + \ldots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \tag{3}$$

o qual pode ser interpretado como um sistema linear para os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ e cujo determinante conhecido como determinante de *Vandermonde*, é dado por:

$$V = V\left(x_0, x_1, \ldots, x_n\right) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & & & \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} \quad (4)$$

Para se calcular V , procede-se da seguinte forma:

Considere a função $V(x)$ definida por:

$$V(x) = V\left(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x\right) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & & & \\ 1 & x_{n-1} & \ldots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix} \quad (5)$$

$V(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n. Além disso, $V(x)$ se anula em $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Pode-se então escrever:

$$V\left(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x\right) = A\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\ldots\left(x - x_{n-1}\right), \quad (6)$$

Onde A depende de $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Para se calcular A, desenvolve-se a função (5) segundo os elementos da última linha e observamos que o coeficiente de x^n é $V\left(x_0, x_1, ..., x_{n-1}\right)$. Logo,

$$V\left(x_0, ..., x_{n-1}, x\right) = V\left(x_0, ..., x_{n-1}\right)\left(x - x_0\right)...\left(x - x_{n-1}\right). \quad (7)$$

Substituindo x por x_n em (7), obtém-se a seguinte fórmula de recorrência:

$$V\left(x_0, ..., x_{n-1}, x_n\right) = V\left(x_0, ..., x_{n-1}\right)\left(x_n - x_0\right)...\left(x_n - x_{n-1}\right). \quad (8)$$

De (4) temos que: $V\left(x_0, x_1\right) = x_1 - x_0$.

Em vista da sentença (8), segue que:

$$V\left(x_0, x_1, x_2\right) = \left(x_1 - x_0\right)\left(x_2 - x_0\right)\left(x_2 - x_1\right).$$

Por aplicações sucessivas em (8) obtém-se:

$$V(x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n) \;=\; \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

Por hipótese, os pontos $x_0, x_1, ..., x_n$ são distintos. Assim $V \neq 0$ e o sistema (3) tem uma única solução $a_0, a_1, ..., a_n$.

Podemos observar, então, que dados $n+1$ pontos distintos $x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n$ e $n+1$ valores $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$ de uma função $y = f(x)$, existe um e um só polinômio $P_n(x_k)$ de grau no máximo n, tal que $P_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Definição 1. Chama-se polinômio de interpolação de uma função $y = f(x)$, sobre um conjunto de pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$ ao polinômio de grau, no máximo n, que coincide com $f(x)$ em $x_0, x_1, ..., x_n$. Tal polinômio será designado por $P_n(x)$.

Exemplo 1. Dados os pares de pontos: (0,8); (1,6); (2,-6), determinar o polinômio de interpolação para a função definida por este conjunto de pares de pontos.

<u>**Solução:**</u>

Temos:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0, & y_0 = 8 = f(x_0), \\ x_1 = 1, & y_1 = 6 = f(x_1), \\ x_2 = 2, & y_2 = -6 = f(x_2). \end{array}$$

Como $n = 2$, devemos determinar $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x + a_a x_2$, tal que $P_2(x_k) = y_k$, $k = 0,1,2$ isto é:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{cases}.$$

Substituindo x_k e y_k, $k = 0,1,2$, obtemos:

$$\begin{cases} a_0 = 8 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 6 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -6 \end{cases},$$

Logo a solução é: $a_0 = 8,\ a_1 = 3\ e\ a_2 = -5.$

Assim: $P_2(x) = 8 + 3x - 5x^2$, é o polinômio de interpolação para a função definida pelos pares de pontos: $(0,\ 8);(1,\ 6);(2, -6)$.

Neste ponto, conclui-se que a construção de um polinômio requer a solução de um sistema linear de equações. Isto não é uma tarefa tão simples à medida que o número de dados aumenta, e mesmo quando estes dados envolvem números racionais ou irracionais. Percebe-se então, que existe uma necessidade de se construir os polinômios de interpolação através de técnicas práticas que garantam resultados aproximados ou exatos.

1.2 - Fórmula de *Lagrange*

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n + 1$ pontos distintos. Consideremos para $k = 0, 1, \ldots, n,$ os seguintes polinômios $l_k(x)$ de grau n:

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})\ (x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})\ (x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

E fácil verificar que:

$$l_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & se\ k \neq j\ , \\ 1, & se\ k = j\ . \end{cases} \tag{9}$$

Para valores dados: $f_0 = f(x_0),\ f_1 = f(x_1),\ \ldots,\ f_n = f(x_n)$ de uma função $y = f(x)$, o polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k\ l_k(x)\ , \tag{10}$$

é de grau no máximo n e, em vista de (9), satisfaz : $P_n(x_k) = f_k\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$

Logo $P_n(x)$, assim definido, é o polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. A fórmula (10) é chamada **Fórmula de *Lagrange* do Polinômio de Interpolação.**

Exemplo 2. Conhecendo-se a seguinte tabela:

x	0	1	2
$f(x)$	8	6	-6

a) Determine o polinômio de interpolação na forma de *Lagrange*.

b) Calcule uma aproximação para $f(1,5)$, usando o item a).

<u>Solução:</u>

Temos:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 8 = f(x_0), \\ x_1 &= 1, & y_1 &= 6 = f(x_1), \\ x_2 &= 2, & y_2 &= -6 = f(x_2). \end{aligned}$$

E, portanto, $n = 2$. Assim, o polinômio de interpolação na forma de *Lagrange* é dado por:

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k \; l_k(x),$$

Determina então os polinômios $l_k(x),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$. Assim:

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{2},$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = \frac{x^2 - 2x}{-1},$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x^2 - x}{2},$$

Portanto: $P_2(x) = f_0\, l_0(x) + f_1\, l_1(x) + f_2\, l_2(x)$

$$P_2(x) = 8\frac{x^2 - 3x + 2}{2} + 6\frac{x^2 - 2x}{-1} - 6\frac{x^2 - x}{2} = 4\left(x^2 - 3x + 2\right) - 6\left(x^2 - 2x\right) - 3\left(x^2 - x\right)$$

Agrupando os termos semelhantes, obtém-se: $P_2(x) = -5x^2 + 3x + 8$

Uma aproximação de $f(1,5)$ é dada por $P_2(1,5)$. Assim, usando o algoritmo de *Briot-Ruffini*, obtemos:

	-5	3	8
1.5		-7,5	-6,75
	-5	-4,5	1,25

Logo: $f(1.5) \simeq P_2(1.5) = 1.25$.

Este método consiste em multiplicar os coeficientes pelo valor de x na função depois somar e subtrair cada termo até encontrar o valor aproximado da função.

Também podemos obter $f(1.5)$ efetuando o seguinte cálculo: $P_2(1,5) = -5\times1,5^2 + 3\times1,5 + 8 = 1,25$. Uma observação é que este último tipo de cálculo é utilizado somente para obter o resultado quando resolvemos problemas manuscritos.

Em resumo. Observar-se que para obter o valor da função num ponto não tabelado, podemos aproximar a função por seu polinômio de interpolação.

1.3 – Estudo do erro de Interpolação de *Lagrange*

Da definição de polinômio interpolador tem-se que, o polinômio de interpolação $P_n(x)$ para uma função $y = f(x)$ sobre um conjunto de pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$ satisfaz a propriedade:

$$P_n\ (x_k)\ = f_k\ ,\ k\ =\ 0,\ 1,\ .\ .\ .\ ,\ n. \tag{11}$$

É importante observar que para os pontos $\bar{x} \neq x_k$ nem sempre $P_n(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Porém, uma possível avaliação de $f(x)$ nos pontos $\bar{x} \neq x_k,\ k = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,\ n$ pode ser realizada da seguinte forma: considere $P_n\ (x)$ como uma aproximação para a função $y = f(x)$ num certo intervalo que contenha os pontos $x_0, x_1, ..., x_n$. Logo, aproxima-se o valor $f(\bar{x})$ através de $P_n(\bar{x})$. Nesse ponto, podemos perguntar o seguinte: o polinômio de interpolação é uma boa aproximação para $f(x)$? Como podemos medir o tamanho do erro cometido quando substituímos $f(x)$ por $P_n(x)$? Para responder essas questões, primeiramente, apresentaremos dois lemas, bem conhecidos, de um curso de cálculo.

Lema 1 -Teorema de *Rolle* - Seja $f(x)$ contínua em $[a,b]$ e diferenciavél em cada ponto de (a,b). Se $f(a) = f(b)$, então existe um ponto $x = \xi,\ a < \xi < b$, tal que, $f'(\xi) = 0$.

Prova: Caso f seja uma função constante, $f(a) = f(b) = f(x)$, então sua derivada é nula em todos os pontos de $[a,b]$ e, nesse caso, o teorema está demonstrado.

Se f não for toda nula, ela terá valores maiores ou menores que $f(a)$ e $f(b)$:

Se $f(x) > f\left(a\right)$ para algum *x* em *(a, b)*, pelo Teorema do Valor Extremo, f assume um valor máximo em algum ponto de $\left[a,b\right]$. Uma vez que $f(a) = f\left(b\right)$, a função deve assumir esse valor máximo em *c* dentro de *(a, b)*. Isso significa que f tem um máximo local em *c* e é diferenciável nele. Lembrando que a função é diferenciável no intervalo (a,b), por hipótese. Portanto $f'(c) = 0$.

Se $f(x) < f\left(a\right)$ para algum *x* em *(a, b)*, pelo Teorema do Valor Extremo, f assume um valor mínimo em algum ponto de $\left[a,b\right]$. Uma vez que $f(a) = f\left(b\right)$, a função deve assumir esse valor mínimo em *c* dentro de *(a, b)*. Isso significa que f tem um mínimo local em *c* e é diferenciável nele. Portanto $f'(c) = 0$.

Lema 2 - Teorema de *Rolle* generalizado - Seja $n \geq 2$. Suponhamos que $f(x)$ seja contínua em $\left[a,b\right]$ e que $f^{(n-1)}(x)$ exista em cada ponto de $\left(a,b\right)$. Suponhamos que $f(x_1) = f(x_2) = ... = 0$ para $a \leq x_1 < x_2 < . . . < x_n \leq b$. Então existe um ponto ξ, $x_1 < \xi < x_n$, tal que $f^{(n-1)}(\xi) = 0$.

Prova: Vamos demonstrar usando indução matemática.

Para $n = 1$, já está demonstrado pelo Teorema de *Rolle*. Vamos supor válida, por hipótese de indução para n. Queremos provar que é válido para $n+1$ .Pelo Teorema de *Rolle*, para cada inteiro k no intervalo $\left[1,n\right]$, existe um ε_k no intervalo aberto (a_k, b_k) tal que $f'(\varepsilon_k) = 0$. Portanto, a primeira derivada de *Rolle* satisfaz o que assumimos para $n+1$ intervalos fechados $\left[\varepsilon_1, \varepsilon_2\right],...,\left[\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n\right]$. Pela hipótese de indução, há um ε para o qual a derivada $f^{n+1}(\varepsilon) = 0$. Como se demonstra.

Agora, enunciaremos um teorema que fornece uma expressão para o cálculo do termo do erro.

Teorema 2 - Seja $f(x)$ contínua em $\left[a,b\right]$ e suponhamos que $f^{(n+1)}(x)$ exista em cada ponto de $\left(a,b\right)$. Se $a \leq x_0 < x_1 <. . .< x_n \leq b$, então

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_n)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi), \tag{12}$$

onde o $\min\left\{x, x_0, x_1, ..., x_n\right\} < \xi < \max\left\{x, x_0, x_1, ..., x_n\right\}$ e o ponto ξ depende de x.

Prova: Sendo $P_n(x_k) = f(x_k)$, a função $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ se anula em $x = x_k, k = 0,1,...,n.$ Seja x fixado e tal que $x \neq x_k, k = 0,1,...,n$. Consideremos as funções $K(x)$ e $F(t)$, definidas por:

$$K(x) = \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)}, \quad x \neq x_k, \quad k = 0,1,...,n \text{, e} \tag{13}$$

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - (t - x_0)(t - x_1)...(t - x_n)K(x) \tag{14}$$

A função $F(t)$ se anula nos seguintes $n+1$ pontos $t = x_0, t = x_1, ..., t = x_n$. Anula-se também em $t = x$, em virtude da função $K(x)$. Pelo **Lema 1.1.3**, a função $F^{(n+1)}(t)$ se anula em um ponto $\xi = \xi(x)$ tal que:

$$. \min\{x, x_0, x_1, ..., x_n\} < \xi < \max\{x, x_0, x_1, ..., x_n\}.$$

Calculando então $F^{(n+1)}(t)$, tendo em vista (14), obtemos:

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!K(x).$$

Então, substituindo t por ξ, segue que:

$$0 = f^{(n+1)}(\varepsilon) - (n+1)!K(x).$$

Portanto:

$$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{15}$$

Comparando (15) e (13), temos, finalmente:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

Onde o $\min\{x, x_0, x_1, ..., x_n\} < \xi < \max\{x, x_0, x_1, ..., x_n\}$, o que demonstra o teorema.

Em vista de (12), podemos escrever:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x). \tag{16}$$

O termo $R_n(x)$ na expressão (16) é chamado de **termo do erro** ou **erro de truncamento**. É o erro que se comete no ponto x, quando se substitui a função por seu polinômio de interpolação calculado em x.

Uma observação importante é que o Teorema 2.3 se apresenta mais com um resultado teórico do que prático, visto que não se consegue determinar o ponto ξ de tal modo que fica válida a igualdade em questão. Entretanto, para estimar o erro cometido ao aproximar o valor da função num ponto por seu polinômio de interpolação, utiliza-se o seguinte corolário.

Corolário 1 – Seja $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Se $f(x)$ e suas derivadas até ordem $n+1$ são contínuas em $[a,b]$, então ,

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x-x_0||x-x_1|...|x-x_n|}{(n+1)!} \max_{a \leq t \leq b} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \tag{17}$$

Exemplo 3: Dada a tabela

x	*0*	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$f(x)$	*0*	*0,7071*	*1*	*0,7071*	*0*

Calcular um limitante superior para o erro de truncamento quando avaliamos $f(3\pi/8)$, onde $f(x) = sen(x)$, usando um polinômio de interpolação do quarto grau.

<u>**Solução:**</u> Temos, de (17):

$$|R_4(x)| \leq \frac{|x - x_0| \; |x - x_1| \; |x - x_2||x - x_3||x - x_4|}{5!} \max_{x_0 \leq t \leq x_2} \left| f^{(5)}(t) \right| .$$

Como $f(t) = sen(t)$, segue que:

$$f'(t) = \cos(t), \; f''(t) = -sen(t) \; , \; f'''(t) = -\cos(t), \; f^{(4)}(t) = sen(t), \; f^{(5)}(t) = \cos(t).$$

Como queremos estimar o valor da função $sen(t)$ no ponto $x = 3\pi/8$, usando um polinômio de aproximação do quarto grau, devemos tomar os 5 pontos dados na vizinhança de $x = 3\pi/8$. Tomando então: $x_0 = 0, x_1 = \pi/4, \; x_2 = \pi/2, x_3 = 3\pi/4, \; x_4 = \pi$, temos que:

$$\frac{|3\pi/8 - 0| \; |3\pi/8 - \pi/4| \; |3\pi/8 - \pi/2||3\pi/8 - 3\pi/4||3\pi/8 - \pi|}{5!} = \frac{0,4203}{120} = 0,0035 \text{ e}$$

$$\max_{0 \leq t \leq \pi} |-\cos(t)| = \max_{0 \leq t \leq \pi} |\cos(t)| = |\cos(0)| = |\cos(\pi)| = 1$$

Estamos, portanto em condições de calcular um limitante superior para o erro de truncamento. Assim:

$$\left|R_4(t)\right| \leq 0,0035$$

Pelo resultado obtido, vemos que se tomarmos um polinômio do quarto grau para avaliar $sen(3\pi/8)$, obteremos uma aproximação com duas casas decimais exatas.

1.4 – APLICAÇÕES

Aplicação 1- A integral elíptica completa é definida por:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\left(1-k^2 sen^2(x)\right)^{1/2}} .$$

Por uma tabela de valores dessa integral encontramos: $K(1)=1,5708; K(2)=1,5719; K(3)=1,5739$. Determinar $K(2,5)$, usando polinômio de interpolação, na forma de *Lagrange*, sobre todos os pontos.

<u>Solução:</u> Considerando a tabela:

x	*1*	*2*	*3*
$K(x)$	*1,5708*	*1,5719*	*1,5739*

temos:

$$x_0 = 1, \qquad y_0 = 1,5708 = f(x_0),$$
$$x_1 = 2, \qquad y_1 = 1,5719 = f(x_1),$$
$$x_2 = 3, \qquad y_2 = 1,5739 = f(x_2).$$

e, portanto, $n = 2$. Assim, o polinômio de interpolação na forma de *Lagrange* é dado por:

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k \; l_k(x),$$

Determinemos os polinômios $l_k(x),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$ Temos:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{x^2-5x+6}{2},$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = \frac{x^2-4x+3}{-1},$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{x^2-3x+2}{2},$$

Portanto: $P_2(x) = f_0\, l_0(x) + f_1\, l_1(x) + f_2\, l_2(x)$.

$$P_2(x) = 1,5708\frac{x^2-5x+6}{2} + 1,5719\frac{x^2-4x+3}{-1} + 1,5739\frac{x^2-3x+2}{2} =$$
$$= 0,7854\left(x^2-5x+6\right) - 1,5719\left(x^2-4x+3\right) + 0,7869\left(x^2-3x+2\right)$$

Agrupando os termos semelhantes, segue que: $P_2(x) = 0,0004x^2 - 0,0001x + 1,5705$

Uma aproximação de $f(2,5)$ é dada por $P_2(2,5)$. Assim, usando o algoritmo de *Briot-Ruffini*, obtemos:

	0,0004	-0,0001	1,5705
2,5		0,001	0,00225
	0,0004	-0,0009	1,5727

Logo: $f(2,5) \simeq P_2(2,5) = 1,5727$. Ver página 16.

Aplicação 2- O valor de $\log_{10} 12,7$ foi computado por interpolação linear sobre os pontos 12 e 13. Mostrar que o erro de truncamento é menor ou igual que 0.004.

__Solução:__ Considerando a função $f(x) = \log_{10}(x) \Rightarrow f(12) = 1,0792, \quad f(13) = 1,1139$. Logo podemos tabelas esses valores da seguinte forma:

x	*12*	*13*
$f(x)$	*1,0792*	*1,1139*

Pretende-se calcular um limitante superior para o erro de truncamento ao avaliarmos $f(12.7)$, sendo $f(x) = \log_{10}(x)$ e usando um polinômio de interpolação do segundo grau.

De (17) segue que : $\left|R_2(x)\right| \le \frac{|x - x_0|\ |x - x_1|}{2!} \max_{x_0 \le x \le x_2} \left|f''(x)\right|$.

Como $f(x) = \log_{10}(x)$, então:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln(10)}$$

Tomando então: $x_0 = 12, x_1 = 13$, temos que:

$$\frac{|12{,}7\text{-}12|\ |12{,}7\text{-}13|}{2!} = \frac{0{,}2100}{2} = 0{,}1050 \text{ e}$$

$$\max_{12 \le x \le 13} \left| -\frac{1}{x^2 \ln(10)} \right| = \left| \frac{1}{169.\ln(10)} \right| = 0{,}0026$$

Logo,

$$|R_2(t)| \le 0{,}1050 \times 0{,}0026 = 0{,}0003$$

Fazendo arredondamento para três casas decimais tem-se:

$$|R_2(t)| \le 0{,}0003$$

CAPÍTULO 2 – MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO DE NEWTON

2.1 – Preliminares

Para a determinação do polinômio de interpolação pelo método de *Lagrange* existem alguns passos que não se pode mudar, ou seja, quando se deseja passar um polinômio de grau n (constituído por $n+1$ pontos) para um polinômio de grau $n+1$ (constituído por $n+2$ pontos) todo o processo de construção do polinômio tem que ser totalmente refeito. Por tal motivo, neste capítulo, o objetivo é obter através da forma de *Newton* um polinômio de interpolação que não exige tanta reforma, e para construção desse polinômio deve-se ter inicialmente o conhecimento de diferença dividida de uma função.

2.1.1 Diferença Dividida

Definição 2. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ pontos distintos no intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, f_1, \ldots, f_n$, $n+1$ valores de uma função $y = f(x)$ sobre $x = x_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Define-se:

$$f[x_k] = f(x_k), \; k = 0, 1, \ldots, n;$$

$$f\ [x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n] = \frac{f\ [x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n] - f\ [x_0,\ x_1,\ ...,\ x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Onde $f[x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n]$ é a ***diferença dividida*** de ordem n da função $f(x)$ sobre os pontos $x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n$. Assim, usando a definição, temos que:

$$f\ [x_0,\ x_1] = \frac{f\ [x_1] - f\ [x_0]}{x_1 - x_0},$$

$$f\ [x_0,\ x_1,\ x_2] = \frac{f\ [x_1,\ x_2] - f\ [x_0,\ x_1]}{x_2 - x_0},$$

$$f\ [x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3] = \frac{f\ [x_1,\ x_2,\ x_3] - f\ [x_0,\ x_1,\ x_2]}{x_3 - x_0}.$$

Das igualdades acima pode afirmar que para calcular uma diferença dividida de ordem n, é necessário conhecer as diferenças divididas de ordem $n-1$. Por outro lado, os valores das diferenças divididas dependem apenas do valor da função nos pontos dados, como pode-se observar no seguinte cálculo:

$$f\ [x_0,\ x_1,\ x_2] = \frac{f\ [x_1,\ x_2] - f\ [x_0,\ x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}.$$

Entretanto, existe uma maneira mais simples de se calcular as diferenças divididas de uma função.

2.1.2 Cálculo Sistemático das Diferenças Divididas.

Para calcular as diferenças divididas de uma função $f(x)$ sobre os pontos $x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n$, construímos a tabela de diferenças divididas:

Tabela 1. Tabela de Diferenças Divididas

x	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
\hline
x_0 & f[x_0] = f_0 & & \\
 & & f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} & \\
x_1 & f[x_1] = f_1 & & f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0} \\
 & & f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} & \\
x_2 & f[x_2] = f_2 & & f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]}{x_3 - x_1} \\
 & & f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} & \\
x_3 & f[x_3] = f_3 & & f[x_2,x_3,x_4] = \dfrac{f[x_3,x_4] - f[x_2,x_3]}{x_4 - x_2} \\
 & & f[x_3,x_4] = \dfrac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3} & \vdots \\
x_4 & f[x_4] = f_4 & & \\
 & & \vdots & \\
\vdots & \vdots & & \\
\end{array}
\tag{1}
$$

Desta maneira, segundo a Tabela 1 temos:

a) A primeira coluna é constituída dos pontos $x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n$;

b) A segunda coluna contém os valores de $f(x)$ nos pontos $x_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n$;

c) Nas colunas $3, 4, 5, \ldots,$ estão as diferenças divididas de ordem 1, 2, 3, . . . Cada uma dessas diferenças é uma fração cujo numerador é sempre a diferença entre duas diferenças divididas consecutivas e de ordem imediatamente inferior e cujo denominador é a diferença entre os dois extremos dos pontos envolvidos.

Exemplo 4 - Para os valores tabelados, construir a tabela de diferenças divididas.

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	0	1	-1	0

__Solução:__ Preenchendo os valores conforme a Tabela 1, temos:

x	$f[x_i]$	$f[x_i,x_j]$	$f[x_i,x_j,x_k]$	$f[x_i,x_j,x_k,x_l]$

-2	0			
		$\frac{1-(0)}{-1-(-2)}=1$		
-1	1			
		$\frac{-1-(1)}{1-(-1)}=-1$	$\frac{-1-(1)}{1-(-2)}=\frac{-2}{3}$	
				$\frac{\frac{2}{3}-(\frac{-2}{3})}{2-(-2)}=\frac{1}{3}$
1	-1			
		$\frac{0-(-1)}{2-1}=1$	$\frac{1-(-1)}{2-(-1)}=\frac{2}{3}$	
2	0			

Para calcular a diferença dividida $f[x_1,\ x_2,\ x_3]$, usamos a definição $f[x_1,\ x_2,\ x_3] = \dfrac{f[x_2,\ x_3] - f[x_1,\ x_2]}{x_3 - x_1}$ e usando o item c) acima, temos que:

$$f[x_1,\ x_2,\ x_3] = \frac{\frac{-2}{3} - \frac{2}{3}}{2-(-2)} = -\frac{1}{3} \quad .$$

2.1.3 Alguns Resultados sobre Diferenças Divididas

Teorema 3 - As diferenças divididas de ordem k de uma função $f(x)$, satisfazem:

$$f\ [x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_k] = \frac{f\ [x_0]}{(x_0 - x_1)\ (x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_k)}$$

$$+ \frac{f\ [x_1]}{(x_1 - x_0)\ (x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_k)}$$

$$+\ldots+ \frac{f\ [x_k]}{(x_k - x_0)\ (x_k - x_1)\ldots(x_k - x_k - x_{k-1})}$$

Corolário 2 - As diferenças divididas de ordem k de uma função $f(x)$, satisfazem:

$$f\ [x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_k] = f\left[x_{j0}\ ,\ x_{j1}\ ,\ \ldots,\ x_{jk}\right].$$

Onde $\left(j_0,\ j_1,\ \ldots,\ j_k\right)$ é qualquer permutação dos inteiros (0, 1, . . . , k).

Corolário 3 - As diferenças divididas de ordem k de uma função $f(x)$, satisfazem:

$$f[x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_k] =$$
$$= \frac{f[x_0,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_k] - f\left[x_0,\ \ldots,\ x_{j-1},\ x_{j+1},\ \ldots,\ x_k\right]}{x_j - x_i},\ i \neq j\ .$$

Observações:

a) O Corolário 2 afirma que a diferença dividida de $f(x)$, é uma função simétrica de seus argumentos, isto é, independe da ordem dos pontos $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_k$. Nesse sentido, no exemplo 4 temos:

$$f[x_1,\ x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{f[x_1] - f[x_2]}{x_1 - x_2} = f[x_2,\ x_1] \Rightarrow f[x_1,\ x_2] = f[x_2,\ x_1]$$

b) O Corolário 3 afirma que podemos tirar quaisquer dois pontos para construir a diferença dividida de uma função, e não necessariamente o primeiro e o último. Assim, no exemplo 4:

$$f[x_0, x_1, x_2] = -\frac{2}{3}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_1} = \frac{\left(\dfrac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0}\right) - \left(\dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}\right)}{x_0 - x_1} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{-1-0}{1+2}\right) - \left(\dfrac{-1-1}{1+1}\right)}{-2+1} = -\frac{2}{3}$$

2.2 - Fórmula de *Newton*

Como diz CULMINATO, para obtermos a forma de Newton do polinômio de interpolação precisamos inicialmente definir algumas funções. Para tanto, consideraremos que $f(x)$ seja contínua e que possua derivadas contínuas em $[a,\ b]$, e também que os pontos $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ sejam distintos em $[a,\ b]$. Definimos então as funções:

$$f\ [x_0,\ x] \ = \ \frac{f\,[x] \ - f\ [x_0]}{x \ - \ x_0} \text{, definida em } [a,\ b],\ \text{para } x \ \neq \ x_0 . \tag{18}$$

$$f\ [x_0,\ x_1,\ x] \ = \frac{f\ [x_0,\ x] \ - f\ [x_0,\ x_1]}{x \ - \ x_1} \text{, definida em } [a,\ b], \tag{19}$$

Para, $x \neq x_0 \ e \ x \neq x_1$.

$\vdots$

$$f\,[x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x] \ = \frac{f\,[x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x] \ - f\,[x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n]}{x \ - \ x_n} . \tag{20}$$

Definida em$[a,\ b]$, para $x \neq x_k,\ k \ = \ 0,\ 1,\ \ldots,\ n$.

Observe que nas funções definidas acima acrescentamos, sucessivamente, na diferença dividida o próximo ponto da tabela. Em todas estamos aplicando o Corolário 3. O objetivo agora é encontrar uma fórmula de recorrência para $f\,(x)$. Assim, de (18) temos que:

$$f\,(x) \ = f\,[x_0] \ + \ (x \ - \ x_0)\, f\,[x_0,\ x] \ .$$

De (19), usando (18), obtemos:

$$f\ [x_0,\ x_1,\ x]\ (x \ - \ x_1) \ = f\,[x_0,\ x] \ - f\,[x_0,\ x_1]$$

$$\Rightarrow f\ [x_0,\ x_1,\ x]\ (x \ - \ x_1) \ = \ \frac{f\,[x] \ - f\,[x_0]}{x \ - \ x_0} \ - f\ [x_0,\ x_1]$$

$$\Rightarrow f\,(x) \ = \ f\ [x_0] \ + \ (x \ - \ x_0)\, f\ [x_0,\ x_1] \ + \ (x \ - \ x_0)\ (x \ - \ x_1)\, f\,[x_0,\ x_1,\ x] \ .$$

De maneira análoga, de $(n+1)$, obtemos:

$$\begin{aligned} f\,(x) = \{ f\,[x_0] \ &+ (x \ - \ x_0)\, f\,[x_0,\ x_1] \ + \ (x \ - \ x_0)(x \ - \ x_1)\, f\,[x_0,\ x_1,\ x_2] \\ &+ \ (x \ - \ x_0)\ (x \ - \ x_1)\ (x \ - \ x_2)\, f\,[x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3] \ + \ \ldots \\ &+ \ (x \ - \ x_0)\ (x \ - \ x_1) \ldots (x \ - \ x_{n-1})\, f\,[x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n] \ \}_1 \\ &+ \ \{(x \ - \ x_0)\ (x \ - \ x_1) \ldots (x \ - \ x_n)\, f\,[x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x]\}_2 \ . \end{aligned} \tag{21}$$

Temos assim, obtido uma fórmula de recorrência para $f\,(x)$. Vejamos o que significam $\{\ldots\}_1 \ e \ \{\ldots\}_2$ em (21).

Teorema 4 - O polinômio:

$$P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0) f\ [x_0, x_1]$$
$$+ \ldots + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \{\ldots\}_1$$

é o polinômio de interpolação da função $y = f(x)$ sobre os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, isto é,

$$P_n(x_k) = f(x_k),\ k = 0, 1, \ldots, n$$

Prova: (provaremos por indução em n).

1) Para n = 1, temos que:

$$P_1(x) = f[x_0] + (x - x_0) f\ [x_0, x_1]$$

$$= f[x_0] + (x - x_0)\ \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}.$$

Logo,

$$para\ x = x_0 \ \Rightarrow\ P_1(x_0) = f[x_0] + (x_0 - x_0)\ \frac{f[x1] - f[x0]}{x_1 - x_0} = f\ [x_0]\ ,$$

$$para\ x = x_1 \ \Rightarrow\ P_1(x_1) = f[x_0] + (x_1 - x_0)\frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f[x_1]\ .$$

2) Suponha válido que para $n = k - 1,$ isto é, $P_k - 1(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, k - 1.$

3) Para provar que $n = k$, divide-se a prova em duas partes. Assim:

a) Seja $i < k$; então:

$$P_k(x_i) = P_{k-1}(x_i) + (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{k-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

$$= P_{k-1}(x_i) = f(x_i)\ ,\ \text{utilizando a hipótese de indução.}$$

b) Seja $i = k$; então:

$$P_k(x_k) = f[x_0] + (x_k - x_0) f[x_0, x_1] + \ldots$$

$$+ (x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

Fazendo $x = xk$ em (21), (lembrando que $n = k$), e comparando com a expressão obtida acima para $P_k(x_k)$, vemos que $P_k(x_k) = f(x_k)$, o que completa a prova do teorema.

Teorema 5 - *Para* $x \in [a,b]$, $x \neq x_k$, $k = 0, \ldots, n$,

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \;;\; \xi \in (x_0, x_n).$$

Prova: Usando o Teorema 4, em (21), podemos escrever:

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)\ldots(x - x_n)\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]$$

$$\Rightarrow f(x) - P_n(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_n)\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\,. \tag{22}$$

Por outro lado, usando (12), temos que:

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\ldots(x - x_n)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}; \tag{23}$$

Onde $\xi \in (x_0, x_n)$.

Mas $(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) \neq 0$, porque os pontos tabelados são distintos, Assim comparando (22) com (23), segue que:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!};\; \xi \in (x_0, x_n)\,.$$

Portanto chama-se ***Forma de Newton do Polinômio de Interpolação ou Fórmula de Newton***, a seguinte expressão:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2]$$

$$+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \{\ldots\}_1$$

.**Exemplo 5 –** Conhecendo-se a seguinte tabela:

x	*-2*	*-1*	*1*	*2*	
$f(x)$	*0*	*1*	*-1*	*0*	

Calcular $f(0,5)$, usando polinômio de interpolação de Newton.

Solução:

Temos:

$$x_0 = -2\,, \qquad f_0 = f\left(x_0\right) = 0\,,$$
$$x_1 = -1, \qquad f_1 = f\left(x_1\right) = 1\,,$$
$$x_2 = 1\,, \qquad f_2 = f\left(x_2\right) = -1\,,$$
$$x_3 = 2\,, \qquad f_3 = f\left(x_3\right) = 0\,,$$

Como queremos interpolar $f(0,5)$, escolhemos três pontos próximos de 0,5. Neste caso, x_0, x_1 e x_2. Assim, temos que, e o polinômio de interpolação na forma de Newton é dado por:

$$P_2(x) = f\left[x_0\right] + \left(x - x_0\right) f\left[x_0,\, x_1\right] + \left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right) f\left[x_0,\, x_1,\, x_2\right]$$

Em primeiro lugar, construímos a tabela de diferenças divididas. Assim:

x	$f\left[x_i\right]$	$f\left[x_i, x_j\right]$	$f\left[x_i, x_j, x_k\right]$	$f\left[x_i, x_j, x_k, x_l\right]$
-2	**0**			
		1		
-1	1		**-2/3**	
		-1		**1/3**
1	-1		2/3	
		1		
2	0			

Portanto: $P_2(x) = 0 + (x + 2)(1) + (x + 2)(x + 1)\left(\dfrac{-2}{3}\right).$

Agrupando os termos semelhantes obtemos: $P_2(x) = -\dfrac{2x^2}{3} - x + \dfrac{2}{3}.$

O valor é aproximado de $f\left(0,5\right)$ é dado por $P_2\left(0,5\right) = 0$. Assim, temos:
$f\left(0,5\right) \simeq P_2\left(0,5\right) = 0$.

2.3 – Estudo do erro de Interpolação de *Newton*

Uma observação neste caso é que para o cálculo do erro de truncamento na forma de *Newton* usamos o mesmo da forma de *Lagrange* dado em (16), ou seja:

$$R_n(x) = \left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\ldots\left(x - x_n\right) f\left[x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n,\, x\right] = \{\ldots\}\ ,. \qquad (24)$$

Observação: Como a diferença dividida $f\left[x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n,\ x\right]$ não depende da ordem de seus argumentos, podemos reescrever os pontos $x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n,\ x$ em ordem crescente $x_0^{'},\ x_1^{'},\ ...,\ x_n^{'},\ x_{n+1}^{'}$. Então pelo Teorema 5, temos:

$$f\left[x_0^{'},\ x_1^{'},\ ...,\ x_n^{'},\ x_{n+1}^{'}\right] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ ;\ \xi \in \left(x_0^{'},\ x_{n+1}^{'}\right). \tag{25}$$

Este resultado nos permite avaliar o comportamento da derivada de ordem $n+1$ de uma função $y = f(x)$ (supondo que ela existe), por meio das diferenças divididas de ordem $n+1$ dessa função no intervalo [a, b]. Em particular, a diferença dividida de ordem n de um polinômio $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ é independente do ponto x e igual a a_n (coeficiente de seu termo de grau n). As diferenças de ordem maior que n são todas iguais a zero. Assim, ao examinarmos uma tabela de diferenças divididas de uma função, se as diferenças de ordem k são praticamente constantes, isto significa que a função é bastante próxima de um polinômio de grau k. Podemos, então, usar um polinômio de grau k para interpolar tal função.

Exemplo 6- Dada a tabela de valores,

x	*-2*	*-1*	*1*	*2*
$f(x)$	*0*	*1*	*-1*	*0*

Estime o erro de truncamento de $f(0,5)$, em que seu valor foi aproximado pelo polinômio de *Newton.*

<u>Solução:</u> Para dar uma estimativa para o erro de truncamento usaremos os cálculos das diferenças divididas de ordem 3 já obtidos anteriormente, para a função dada.

x	$f[x_i]$	$f[x_i,x_j]$	$f[x_i,x_j,x_k]$	$f[x_i,x_j,x_k,x_l]$
-2	**0**			
		1		
-1	1		**-2/3**	
		-1		**1/3**
1	-1		2/3	
		1		
2	0			

Fazendo os cálculos observamos que ela é igual a 1/3. Assim, usando (24), segue que:

$$\left|R_2(0,5)\right| \leq \left|(0,5-(-2))\ (0,5-(-1)\ (0,5-1)(0,5-2)\frac{1}{3}\right| = 0,6250$$

Portanto: $R_2(0,5) \simeq 0,6$.

2.4 – APLICAÇÕES

Aplicação 1- A integral elíptica completa é definida por:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\left(1-k^2 sen^2(x)\right)^{1/2}}.$$

Por uma tabela de valores dessa integral encontramos: $K(1)=1,5708; K(2)=1,5719; K(3)=1,5739$. Determinar $K(2,5)$, usando polinômio de interpolação, na forma de *Newton*, sobre todos os pontos.

Considerando a tabela:

x	*1*	*2*	*3*
$K(x)$	*1,5708*	*1,5719*	*1,5739*

temos:

$$x_0 = 1, \qquad y_0 = 1,5708 = f(x_0),$$
$$x_1 = 2, \qquad y_1 = 1,5719 = f(x_1),$$
$$x_2 = 3, \qquad y_2 = 1,5739 = f(x_2).$$

E $n = 2$. Assim o polinômio de interpolação na forma de Newton é dado por:

$$P_2(x) = f[x_0] + (x-x_0)\, f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)\, f[x_0, x_1, x_2].$$

Em primeiro lugar, construímos a tabela de diferenças divididas. Assim:

x_i	$K[x_i]$		
1	**1,5708**		
		0,0011	
2	1,5719		**0**
		0,0011	
3	1,5730		

Seguidamente, montamos o polinômio de Newton de segunda ordem:

$$P_2(x) = 1,5708 + (x-1)(0,0011) + (x-1)(x-2)(0)$$

$$P_2(x) \; = \; 0,0011x \; + \; 1,5697$$

Logo os valores de $K(2,5)$ é dado por $P_2(2,5)$, lembrando que este é um valor aproximado. Assim, temos: $f(2,5) \simeq P_2(2,5)$ = 1,5725.

Aplicação 2- Sabendo-se que a equação $f(x) = x^4 + 6x^2 - 1$ tem uma raiz em [0,1], determinar o valor aproximado dessa raiz usando polinômio de interpolação de *Newton* sobre 3 pontos distintos (0; 0,5 e 1).

Considere os seguintes dados:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0\,, & y_0 &= \text{-}1 = f\ (x_0)\ , \\ x_1 &= 0{,}5\,, & y_1 &= 0{,}5625 = f\ (x_1)\ , \\ x_2 &= 1\,, & y_2 &= 6 = f\ (x_2)\ . \end{aligned}$$

Assim o polinômio de interpolação na forma de Newton é dado por:

$$P_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2],$$

Construímos então a tabela de diferenças divididas, temos:

x	$f(x)$		
0	**-1**		
		3,125	
0.5	0,5625		**7,75**
		10,875	
1	6		

Agrupando-se os termos temos polinômio:

$$P_2(x) \; = \; -1 + \; (x \; -0)(3{,}125) \; + \; (x \; -0)(x \; -0{,}5)(7,75)$$

$$P_2(x) \; = \; 7{,}75x^2 - \; 0{,}75x \; -1.$$

Após a obtenção do polinômio e encontrando a raiz $x_i = 0,4108$ entre 0 e 1 tal que $P_2(x_i) = 0.$ Finalmente, temos que $0,4108$ é a raiz aproximada de $f(x) = x^4 + 6x^2 - 1$ no intervalo [0,1].

CAPÍTULO 3 – MÉTODO DE SPLINES

3.1 – Preliminares

A *Interpolação Splines* desenvolve funções formadas por diferentes polinômios de grau menor ou igual a m, definidos para cada intervalo entre os pontos de interpolação, de modo que em cada ponto de interpolação o *spline* é contínuo, assim como todas as derivadas até ordem $m-1$.

Sabe-se que, no caso da função que se quer interpolar possuir derivadas de valor numérico elevado em alguma região do intervalo de interpolação, a aproximação é prejudicada em todo o intervalo. Nessas situações, a interpolação por *spline* pode auxiliar na tarefa de interpolação CULMINATO, JOSÉ ALBERTO.

O procedimento de construir *splines* é análogo, qualquer que seja o grau dos polinômios utilizados. Nesse capítulo, daremos ênfase ao estudo do *spline* de grau 3, o qual é amplamente utilizado nos processos de interpolação.

3.1.1 – Interpolação *spline cúbico*

Sejam $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ os pontos e interpolação. Um *spline* cúbico é uma função $s(x)$, definida no intervalo $[x_1,\ x_n]$ com as seguintes propriedades:

1. $s(x),\ s'(x)\ e\ s''(x)$, são funções contínuas no intervalo $(x_1,\ x_n)$.

2. Em cada subintervalo $[x_i\ ,\ x_{i+1}],\ s(x)$ é um polinômio cúbico tal que $s(x_i)\ =\ f_i\ =\ f(x_i)$

para $i\ =\ 1,\ 2,\ ...,\ n.$

Portanto, s é composto por $n\ -\ 1$ polinômios cúbicos, onde cada polinômio é determinado por 4 coeficientes $(a_i\ ,b_i\ ,\ c_i\ e\ d_i)$ o que dá um total de $4n\ -\ 4$ coeficientes a determinar, ou seja $4n\ -\ 4$ incógnitas. Então, além de interpolar o ponto x_i, deverá também satisfazer a condição de continuidade nos pontos de interpolação, desse modo:

$$s_i(x_i)\ =\ f_i\ ,\ \text{para}\ i\ =\ 1,\ 2,\ ...,\ n\ -\ 1\ ,\ \text{e}$$

$$s_{n-1}(x_n)\ =\ f_n.$$

A continuidade é satisfeita se

$$s_i(x_{i+1}) = f_{i+1} \ (continuidade\ de\ s\ ),$$

para $i = 1, 2, \ldots, n - 2$. As condições acima implicam $2(n - 1)$ equações. Faltam ainda as continuidades de $s'(x)\ e\ s''(x)$:

$$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \ (continuidade\ de\ s'\ ),$$
$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) \ (continuidade\ de\ s''\ ),$$

para $i = 1, 2, \ldots, n - 2$. Cada condição equivale a $n - 2$ equações. Portanto temos até agora um total de $4n - 6$ equações. Restam duas equações para que seu número seja igual ao número de incógnitas. Essas duas últimas equações relacionam-se com as condições de fronteira do *spline.* Com relação ao comportamento de $s(x)$ no extremo do intervalo, há duas possibilidades a se considerar:

i) *spline* natural,

$$s_1''(x_1) = 0$$
$$s_{n-1}''(x_n) = 0$$

ii) *spline* com mesmas condições de f na extremidade,

$$s_1'(x_1) = f'(x_1)$$
$$s_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$$

Essa última escolha pressupõe que a informação sobre o valor da derivada de f nos extremos do intervalo seja conhecida. Em contrapartida, a aproximação obtida com essa escolha possui uma maior exatidão do que a obtida com *o spline* natural.

Nos próximos parágrafos montaremos o sistema de equações lineares para determinarmos $4n - 4$ coeficientes $a_i\ , b_i\ , c_i\ e\ d_i$ dos $n - 1$ polinômios que compõe o *spline:*

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3. \tag{26}$$

Por ser uma interpolação, a cada x_i, temos que $s(x_i) = f_i$,ou seja, $s(x_i) = f_i$. Portanto, em vista da equação (26) a interpolação implica:

$$f_i = s_i(x_i) = a_i$$

para $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. O que determina o valor dos coeficientes a_i. A continuidade do *spline* $s_i(x)$ nos pontos de interpolação implica a equação $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$ para $i = 1, 2, \ldots, n - 2$, ou seja,

$$a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3 = a_{i+1}, \text{ ou}$$
$$f_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3 = f_{i+1}. \quad (27)$$

Para aliviar a notação, seja $h_i = (x_{i+1} - x_i)$. Dessa forma, a equação (27) pode ser reescrita como

$$f_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f_{i+1} \quad (28)$$

A continuidade da primeira e segunda derivada implicam

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} \quad (29)$$

e

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1} \quad (30)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n - 2$.

Isolando d_i na equação (30) e substituindo em (28) e (29) encontramos respectivamente

$$f_{i+1} = f_i + b_i h_i + \frac{h_i^2}{3}(2c_i + c_{i+1}) \quad (31)$$

e

$$b_{i+1} = b_i + h_i(c_i + c_{i+1}) \quad (32)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n - 2$

Isolando b_i na equação (31) podemos determiná-lo em termos dos valores conhecidos f_i, h_i e da incógnita c_i (o mesmo acontece com os coeficientes d_i, a partir da equação (30)),

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}), \quad (33)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n - 2$.

A substituição de b_i *e* b_{i-1} dados pela equação (32) na equação (33) com os índices deslocados de uma unidade, ou seja, $b_i = b_{i-1} + h_{i-1}(c_{i-1} + c_i)$, permite encontrar uma equação para os coeficientes c_i em termos dos valores conhecidos f_i e h_i:

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}\right) h_i - 3\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \tag{34}$$

para $i = 2, 3, \ldots, n-1$.

A equação anterior define um sistema de equações lineares para as incógnitas c_i. Note que além dos coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, o sistema envolve um coeficiente c_n que não está diretamente relacionado a algum dos $n - 1$ polinômios s_i. Na realidade, c_n está relacionado às condições de fronteira e sua determinação depende do tipo de *spline* que estamos construindo, se é um *spline* natural ou um *spline* que satisfaz as mesmas condições de f nos extremos do intervalo de interpolação.

As $n - 2$ equações de (34) envolvem n variáveis (as incógnitas c_i), para que o sistema tenha solução única devemos incluir as duas últimas equações que descrevem o comportamento do *spline* nos extremos do intervalo de interpolação. Vamos estudar inicialmente o caso do *spline* natural.

3.1.2 - *Spline* natural

O *spline* natural deve satisfazer as condições $s''(x_1) = 0 \; e \; s''(x_n) = 0$, estas duas equações implicam respectivamente, $c_1 = 0$ e

$$2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1} = 0. \tag{35}$$

A equação (35) implica em termos da equação para os coeficientes d_i de (30) que $c_n = 0$.

Colecionando esses resultados temos o problema de resolver o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_i}\right) - 3\left(\dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \quad i = 2, \ldots, n-1 \\ c_n = 0 \end{cases}$$

Dessa forma, encontra-se o valor dos coeficientes c_i , e a partir desses coeficientes determinamos o valor dos coeficientes b_i através das equações (33):

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}\left(2c_i + c_{i+1}\right),$$

para $i = 2, \ldots, n-1$. Também, o valor dos coeficientes d_i é determinado através da relação (30)

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} , \qquad (36)$$

para $i = 2, \ldots, n-1$. Os coeficientes $a_i = f_i$ como já havíamos afirmado anteriormente.

3.1.3 - *Spline* com as mesmas condições de f nos extremos

Nesse caso o *spline* deve satisfazer as condições $s'(x_1) = f'(x_1) \equiv f_1'$ e $s'(x_n) = f'(x_n) \equiv f_n'$. Para determinar o *spline*, f_1' e f_n' devem ser valores conhecidos. Estas condições implicam respectivamente

$$b_1 = f_1' \qquad (37)$$

$$b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2 = f_n' . \qquad (38)$$

Como os coeficientes b_i satisfazem a equação (33), a equação (37) implica:

$$f_1' = b_1 = \frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}\left(2c_1 + c_2\right),$$

ou seja,

$$2h_1c_1 + h_1c_2 = 3\left(\frac{f_2 - f_1}{h_1}\right) - 3f_1' \qquad (39)$$

Da mesma forma, no caso da equação (38), as equações (33) e (36) implicam:

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = -3\left(\frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}}\right) + 3f'_n \tag{40}$$

Em resumo, devemos resolver o sistema formado pelas equações (34), (39) e (40)

$$\begin{cases} 2h_1c_1 + h_1c_2 = 3\left(\dfrac{f_2 - f_1}{h_1}\right) - 3f'_1 \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2\left(h_{i-1} + h_i\right)c_i + h_ic_{i+1} = 3\left(\dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_i}\right) - 3\left(\dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), i = 2, \ldots, n-1, \\ h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = -3\left(\dfrac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}}\right) + 3f'_n \end{cases}$$

seguidamente, devemos determinar os coeficientes b_i e d_i através das equações (33) e (36):

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}\left(2c_i + c_{i+1}\right),$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \quad ,$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Naturalmente, os coeficientes $a_i = f_i$.

Exemplo 7: Encontre a interpolação *spline* cúbico (*spline* natural) para os dados da seguinte tabela:

x	$f(x)$
-2	0
-1	1
0	0
1	1
2	0
3	1

<u>Solução:</u> O *spline* cúbico natural para o conjunto de dados formado por seis pontos é construído a partir de cinco polinômios de grau 3, ou seja, faremos cinco subdivisões do intervalo $[-2,3]$ nos quais os polinômios cúbicos $s_1(x), s_2(x), s_3(x), s_4(x), s_5(x)$ estejam definidos.

Cada s_i é da forma $s_i(x) = a_i + b_ix + c_ix^2 + d_ix^3$, onde $i = 1, 2, ..., 5$, mais o coeficiente acessório c_6.

Como se trata de um *spline* natural: $c_1 = c_6 = 0$, e os demais coeficientes c_i são solução do sistema:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Calculando o sistema matricial temos que a solução é o vetor $(0.4019, -1.6077, 0.0287, 1.4928)^T$. Os coeficientes b_i e d_i são calculados a partir de $c_1, c_2, ..., c_5$, e $a_i = f_i$.

Observa-se que $h_i = x_{i+1} - x_i \Rightarrow h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1, h_4 = 1, h_5 = 1$ e, em vista da equação (26) a interpolação implica $f_i = s_i(x_i) = a_i$, então $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1, a_5 = 0, a_6 = 1$.

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}\left(2c_i + c_{i+1}\right) \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{a_2 - a_1}{h_1} - \dfrac{h_1}{3}\left(2c_1 + c_2\right) = 0.8660 \\ b_2 = \dfrac{a_3 - a_2}{h_2} - \dfrac{h_2}{3}\left(2c_2 + c_3\right) = -0.7320 \\ b_3 = \dfrac{a_4 - a_3}{h_3} - \dfrac{h_3}{3}\left(2c_3 + c_4\right) = 2.0622 \\ b_4 = \dfrac{a_5 - a_4}{h_4} - \dfrac{h_4}{3}\left(2c_4 + c_5\right) = -1.5167 \\ b_5 = \dfrac{a_6 - a_5}{h_5} - \dfrac{h_5}{3}\left(2c_5 + c_6\right) = -1.9952 \end{cases}$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = \dfrac{c_2 - c_1}{3h_1} = 0.1340 \\ d_2 = \dfrac{c_3 - c_2}{3h_2} = -0.6699 \\ d_3 = \dfrac{c_4 - c_3}{3h_3} = 0.5455 \\ d_4 = \dfrac{c_5 - c_4}{3h_4} = 0.4880 \\ d_5 = \dfrac{c_6 - c_5}{3h_5} = -0.4976 \end{cases}$$

Assim, os *splines* cúbicos naturais ficam definidos da seguinte forma:

$$s(x)=\begin{cases} s_1(x)=0,866029(x+2)+0,1340(x+2)^3,\ -2\le x\le -1 \\ s_2(x)=1-0,7320(x+1)+0,4019(x+1)^2-0,6699(x+1)^3,\ -1\le x\le 0 \\ s_3(x)=2,0266x-1,60766x^2+0,5455x^3,\ 0\le x\le 1 \\ s_4(x)=1-1,5167(x-1)+0,0287(x-1)^2+0,4880(x-1)^3,\ 1\le x\le 2 \\ s_5(x)=-1.9952(x-2)+1,4928(x-2)^2-0,4976(x-2)^3,\ 2\le x\le 3 \end{cases}$$

Conclui-se então, que o polinômio interpolador $s(x)$ é uma função definida por partes, sendo que cada parte é um polinômio cúbico $s_i(x)$ definida para cada subintervalo de interpolação.

Exemplo 8: Determine os valores de $a\ e\ b$ de forma que a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x\ ,\ -1 \le x \le 0 \\ ax^2 + bx\ ,\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

seja, um *spline* cúbico.

<u>Solução:</u> Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x\ ,\ -1 \le x \le 0 \\ ax^2 + bx\ ,\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Temos que:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1\ ,\ -1 \le x \le 0 \\ 2ax + b\ ,\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

e

$$f''(x) = \begin{cases} 6x\ ,\ -1 \le x \le 0 \\ 2a\ ,\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Para que f seja um *spline* cúbico, ela deve ser tal que os limites para $f,\ f'\ e\ f''$, devem estar bem definidos em $x = 0$. Ou seja, a partir de $f''(x)$, devem ter que $a = 0$; a partir de $f'(x)$, devemos ter que $b = 1$. Quaisquer que sejam os valores de $a\ e\ b$, $lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Portanto, f será um *spline* cúbico, se $a = 0\ e\ b = 1$.

3.2 – Estudo do erro de Interpolação de *Spline* Cúbicos

Segundo QIU, JINGMEI, uma estimativa do erro cometido pelo método de *splines* cúbicos é dada por

$$\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} \left|f(x) - p_3(x)\right| \leq \frac{h^4}{4!} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|,$$

onde $h = \max_i |x_i - x_{i-1}|$. Dessa forma, pode-se observar que o erro associado a aproximação por *splines* cúbicos seria $O\left(h^4\right)$, para um h pequeno em cada subintervalo de aproximação.

4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi apresentado a descrição, a estimativa de erro e algumas aplicações das técnicas mais conhecidas de interpolação de funções, ao saber as técnicas de interpolação de *Lagrange*, *Newton* e *splines*. Apesar que, pelo Teorema 2, o polinômio de interpolação é único, estas três técnicas possuem características próprias, tanto na construção do polinômio interpolador, quanto na sua aplicabilidade.

O método de *Lagrange* é um método de fácil implementação, e sua aplicação é recomendável em problemas acadêmicos ou de pouca complexidade. Como já observado, a alteração do grau do polinômio interpolador exige que os cálculos sejam todos refeitos, o que torna dificultosa a resolução. Por outro lado, a estimativa do erro de truncamento pode ser obtida somente se a função interpolada for conhecida analiticamente.

O capítulo 2 apresenta o método de *Newton*, o qual pode ser considerado uma excelente opção, pelo fato de possuir baixa complexidade de resolução, isto, torna as implementações rápidas e práticas. Por outro lado, no caso de alteração do grau do polinômio interpolador, poucas alterações são precisas.

O processo de se construir interpolações s*pline* é análogo para qualquer grau dos polinômios. Entretanto, o capítulo 3 se restringe apenas ao estudo de *splines* cúbicos, onde se observa que além de interpolar o ponto em questão, deverá também de satisfazer condições de continuidade nos pontos de interpolação, o que torna o método complexo e trabalhoso. Por outro lado, para cada subintervalo de aproximação, obtemos polinômios interpoladores com erro de truncamento baixo, o qual o torna eficiente para problemas que exigem uma aproximação mais acurada.

5 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

RUGGIERO, M.A.G.; LOPES, V.L.R. -“Cálculo Numérico”,1997.

CULMINATO, JOSÉ ALBERTO – “Cálculo Numérico – ICMC/USP.

SPERANDIO, MENDES e SILVA- “ Cálculo Numérico, 2003.

JINGMEI QIU - https://www.math.uh.edu/~jingqiu/. Interpolation , polynomial interpolation, spline,