UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI – UFSJ
NÚCLEO DE EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – DEMAT

ANDREZA CRISTINA DA SILVA LEMOS

Poliedros: Uma proposta pedagógica

SÃO JOÃO DEL-REI
2016

ANDREZA CRISTINA DA SILVA LEMOS

Poliedros: Uma proposta pedagógica

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática a Distância, da Universidade Federal de São João Del-Rei.

Orientador: Eder José de Oliveira

SÃO JOÃO DEL-REI

2016

ANDREZA CRISTINA DA SILVA LEMOS

Poliedros: Uma proposta pedagógica

.

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática a Distância, da Universidade Federal de São João Del-Rei.

Os componentes da banca de avaliação, abaixo identificados, consideram este trabalho aprovado.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof.ª Ma. Leidyanna J. Garcia Lima
UFSJ

____

Prof.º Me. Éder José de Oliveira
UFSJ

Data da aprovação: São João del-Rei, 26 de novembro de 2016.

Agradeço a Deus por ser essencial em minha vida!

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, autor de meu destino, meu guia, socorro presente na hora da angústia, ao meu pai Manuel, minha mãe Helena, in memoriam, ao meu esposo Dalton, que sempre esteve ao meu lado, aos meus filhos Maria Eduarda e Kauã e as minhas amigas Carla Karen e Marquedes, por todos os momentos que passamos juntas nesta caminhada.

RESUMO

Este trabalho é o resultado de uma pesquisa qualitativa com a base em dados adquiridos por meio de avaliações e questionários feitos em sala de aula. Essa investigação baseia-se na aplicação de uma metodologia diferente relacionada ao ensino de geometria, empregando o método Van Hiele, pois é uma abordagem que usa níveis de aprendizagem que possibilitam os alunos serem sujeitos ativos do processo de aprendizagem da Geometria. Esta metodologia foi aplicada em uma turma do Nono ano do Ensino Fundamental de um colégio particular, no município de Pompéu. A coleta de dados traz aspectos positivos e negativos da metodologia, podendo, assim, ajudar futuros professores a escolherem a melhor metodologia possível para cada tipo de turma em que lecionarão. Este trabalho também conta com uma diversidade de poliedros, juntamente com alguns conceitos e considerações.

Palavras-chave: Van Hiele, Geometria, poliedros.

ABSTRACT

This work is the result of a qualitative research on the basis of data acquired through evaluations and surveys done in the classroom. This research is based on the application of a different methodology related to the teaching of geometry, using the method Van Hiele, it is an approach that uses learning levels that allow students to be active subjects of learning geometry process.

His methodology was applied in a class of the Ninth year of elementary school of a private school, in the municipality of Pompéu. The data collection brings positive and negative aspects of the methodology, and can thus help future teachers to choose the best possible methodology for each type of class in which they will teach. This work also has a diversity of polyhedra, along with some concepts and considerations.

Keywords: Van Hiele, geometry, polyhedra

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO....................10
2 TEORIA DE VAN HIELE- DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO 9
2.1 EXISTENCIA DE NÍVEIS....................9
2.1.1 Nível 1: Reconhecimento ou Visualização....................9
2.1.2 Nível 2: Análise....................10
2.1.3 Nível 3: Dedução Informal....................10
2.1.4 Nível 4: Dedução Formal....................10
2.1.5 Nível 5: Rigor....................11
2.2 FASES DE APRENDIZAGEM....................11
2.2.1 Informação....................11
2.2.2 Orientação Dirigida....................11
2.2.3 Explicação....................12
2.2.4 Orientação Livre....................12
2.2.5 Integração....................12
2.3 PROPRIEDADES DOS NÍVEIS....................12
2.3.1 Propriedade 1: Sequencial (Hierarquização e sequencialidade dos níveis)....................12
2.3.2 Propriedade 2: Avanço (Adjacência)....................13
2.3.3 Propriedade 3: Intrínseco e Extrínseco (Distinção)....................13
2.3.4 Propriedade 4: Linguística (Separação)....................13
2.3.5 Propriedade 5: Integração....................13
3 POLIEDROS: CONCEITOS E CONSIDERAÇÕES....................14
3.1 Poliedros convexos regulares....................14
3.2: POLIEDROS CONVEXOS NÃO REGULARES....................15
3.2.1 Relação de Euler....................17
3.2.2 Propriedades- Soma das medidas dos ângulos das faces....................17
3.3 POLIEDROS NÃO CONVEXOS....................18
3.4 POLIEDROS ARQUIMEDIANOS....................18
3.4.1 Truncamento de um poliedro e Snubificação de um poliedro....................19

3.5 POLIEDROS DE KEPLER-POINSOT:.....21
3.6 PRISMAS E ANTIPRISMAS:.....22
3.7 DIPIRÂMIDES E DELTOEDROS.....23
3.8 DUALIDADE E POLIEDROS DE CATALAN.....23
3.9 POLIEDROS DE JOHNSON:.....25
3.10 ESFERAS E DOMOS GEODÉSICOS.....26
4. UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA.....28
4.1. TURMA 9º ANO ENSINO FUNDAMENTAL- INFORMAÇÕES.....28
4.2 TESTE INICIAL.....29
4.2.1 NÍVEL 1- visualização.....29
4.2.2 NÍVEL 2: Análise.....30
4.2.3 NÍVEL 3: Dedução Informal.....32
4.3 TESTE FINAL E RESULTADOS OBTIDOS.....33
4.3.1 Relatório.....33
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....35
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....36
7 ANEXOS.....39
7.1Teste inicial.....39
7.1.1 Teste Final.....40
7.2 QUESTIONÁRIOS.....41
7.3 FOTOS DOS ALUNOS E SUAS CONSTRUÇÕES.....42

1 INTRODUÇÃO

As formas geométricas estão presentes em nosso dia a dia e em todos os lugares. Como as formas geométricas nos rodeiam, podemos encontra-las nas coisas mais simples ou mais extraordinárias. Por esse motivo o ensino de Geometria é importante na formação do aluno.

Figura 01- Colmeia –

Disponível em http://www.geometricworld.com/_a_geometria_e_a_natureza Acesso em Agosto de 2016

Figura 02- Pirâmides do Egito-

Disponível em< http://vivendoavidabemfeliz.blogspot.com.br/> Acesso em Agosto de 2016.

Muitas vezes nos depararmos com a dificuldade em tentar ensinar aos alunos este conteúdo em nosso dia a dia profissional, por não termos materiais necessários para trabalhar, devido à falta de estrutura de algumas escolas públicas, muitas vezes nos vemos desmotivados em preparar aulas práticas, pedagógicas e diferenciadas, no ensino de Geometria Plana e especialmente no ensino de Geometria Espacial.

Por este motivo o presente trabalho tem como objetivo contribuir no desenvolvimento de aulas práticas bem como na construção do conhecimento, possibilitando ao aluno, um estudo diferenciado dos Poliedros, a partir de uma técnica simples e com grande aprendizagem. A Fundamentação teórica é baseada na teoria de van Hiele e tem sua origem em 1957. FONTES (2015).

Van Hiele e sua esposa Dina Hiele, através de seus estudos e pesquisas que se iniciaram nos anos 50, desenvolveram uma teoria que pode ser considerada um modelo de aprendizagem, através de um processo, de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos.

Para van Hiele este pensamento geométrico se desenvolve, nos alunos, a partir de cinco níveis. Para OLIVEIRA(2012), três aspectos básicos devem ser considerados no desenvolvimento desta teoria: a existência de níveis, as propriedades dos níveis e o movimento de um nível para o próximo, no qual falaremos no decorrer deste trabalho.

2 TEORIA DE VAN HIELE- DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

A dificuldade em ensinar geometria desafia a maioria dos educadores, tanto em escolas públicas quanto em escolas particulares, procurando um modelo não tradicional para trabalhar este conteúdo, uma boa opção, seria explorar o cotidiano dos alunos para aplicação dos conteúdos geométricos, pois a geometria está presente em nosso dia a dia. O modelo de van Hiele é um método prático, concreto e bem diferente da maneira tradicional de ensino.

A teoria de van Hiele surge através das teses de Doutorado de Pierre Marie van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof, na Universidade de Utrecht. Esta teoria tem como foco o aprendizado e ela é dividida em cinco níveis de compreensão de conceitos, onde é aplicado uma série de atividades para que os alunos avancem para o próximo nível, o professor tem o papel de mediador, ou seja, facilitador entre o conhecimento e o aluno.

A partir desta teoria, pesquisadores matemáticos, vêm adotando esse modelo, um deles é Adela Jaime, da universidade de Valência, em sua Tese de Doutorado, no Brasil a Professora Mariângela de Castro e Oliveira, apresentou em sua Dissertação de Mestrado em 2012 com o título *Ressignificando conceitos de Geometria Plana a partir do Estudo de Sólidos Geométricos* e a partir de sua Dissertação foi publicado a cartilha *Ressignificando a Geometria Plana no Ensino Médio, com o auxílio de van Hiele*. OLIVEIRA (2012) caracteriza os cinco níveis de compreensão do seguinte modo:

2.1 EXISTENCIA DE NÍVEIS

De acordo com OLIVEIRA (2012), três aspectos devem ser apontados no desenvolvimento esta teoria: A existência de Níveis, As fases de aprendizagem e Propriedades do Modelo. No modelo original de van Hiele, os níveis foram enumerados de 0 a 4, mas em seu livro “Structure and Insight” de 1986, simplificou o modelo original enumerando os níveis de 1 a 5.

2.1.1 Nível 1: Reconhecimento ou Visualização

Os alunos reconhecem e nomeiam as formas geométricas apenas por sua “aparência”, como por exemplo, a “bola de futebol” (icosaedro truncado), um “dado” (hexaedro), os vértices são chamados de “bolinhas” e as arestas de “palitinhos”, demonstrando assim, que não conhecem as propriedades geométricas.

Neste nível os alunos aprendem os termos matemáticos básicos, para as figuras geométricas. Podemos utilizar, como por exemplo, recordes de alguns quadriláteros e embalagens vazias que utilizam os mesmos quadriláteros.

2.1.2 Nível 2: Análise

Neste nível alunos começam a aprender sobre as propriedades das figuras geométricas e o vocabulário apropriado, relacionado a essas propriedades. Mas ainda, são incapazes de fazer ligações entre as propriedades, ainda não identificam uma relação existente entre as figuras, como por exemplo: descrever um losango por suas propriedades: possui 4 lados iguais; suas diagonais são perpendiculares; os seus lados opostos são paralelos e seus ângulos internos são suplementares.

2.1.3 Nível 3: Dedução Informal

Neste nível, o aluno estabelece relações usando a própria figura ou entre figuras, mesmo utilizando a linguagem informal, deduz propriedades ou faz grupo de figuras, já utilizando a definição correta dos conceitos e propriedades das figuras.

O professor realiza demonstrações, onde os alunos são capazes de acompanhar argumentos informais nesta demonstração, mas não conseguem criar uma nova prova partindo de proposição diferentes.

2.1.4 Nível 4: Dedução Formal

Neste nível os alunos vão além de identificar as características das figuras geométricas, são capazes de compreender e desenvolver demonstrações, são capazes de construir provas a partir de postulados e teoremas. Já evidencia-se o desenvolvimento do pensamento abstrato, possibilitando ao aluno identificar e propor a construção de conhecimentos em um nível mais complexo.

2.1.5 Nível 5: Rigor

Para van Hiele, este é o nível de pensamento mais elevado, percebendo neste nível, a capacidade dos alunos de trabalhar em diferentes sistemas geométricos, na compreensão de diversos sistemas axiomáticos, compreendendo a geometria não euclidiana.

2.2 FASES DE APRENDIZAGEM

Van Hiele em sua teoria propôs fazes de aprendizagem como forma de possibilitar a construção do conhecimento, no estudo da geometria.

Segundo OLIVEIRA (2012),

> Van Hiele é mais otimista que Piaget, acreditando que o desenvolvimento cognitivo em geometria pode ser acelerado através de instruções adequadas. O modelo de van Hiele é composto de duas partes: a primeira, totalmente descritiva, procura explicar como se processa a evolução do raciocínio geométrico dos alunos através da descrição dos níveis de pensamento identificados; a segunda, prescritiva, dá indicações de como um professor pode ajudar o seu aluno a alcançar um nível superior de raciocínio.

Tendo como objetivo, que os alunos avancem de um nível para outro, como resultado esperado, de acordo com o planejamento e organização, que são divididas em cinco fases sequenciais, onde priorizam, a exploração, a discussão e a integração. Como apresenta-se:

2.2.1 Informação.

Nesta etapa o professor disponibiliza materiais e informações sobre eles, interage e estimula os alunos a investigar os conhecimentos sobre o assunto. Proporciona um primeiro contato com o conteúdo a ser trabalhado oferecendo ao aluno a oportunidade de adquirir conhecimentos básicos essenciais ao trabalho matemático. De mesma forma, o professor aproveita para observar acerca do conhecimento preliminar dos alunos, sobre o assunto tratado.

2.2.2 Orientação Dirigida

Os alunos investigam o assunto a partir do material, que foi cuidadosamente preparado pelo professor, são tarefas simples mas, que permitem aos alunos, explorar as relações contidas no trabalho, de forma que novos conceitos e estruturas possam ser entendidos, de forma clara e gradual.

2.2.3 Explicação

Nesta fase, o professor é apenas um observador, ele deve estimular seus alunos a expressarem suas descobertas, a realizarem debates e diálogos, em que a contestação de ideias se manifestem estimulando assim o raciocínio. Há assim o desenvolvimento de uma estrutura técnica específica, onde não são utilizados termos técnicos e simbologia própria.

2.2.4 Orientação Livre

Nesta etapa o aluno ganha autonomia e experiência desenvolvendo assim tarefas mais complexas tais, devem fugir aos princípios tradicionais, podendo o professor obter várias respostas. Os alunos, desta forma, descobrem seu caminho.

2.2.5 Integração

Os estudantes apresentam uma visão global de tudo que foi estudado, o conhecimento adquirido, as habilidades entre outros. O professor inter-relaciona com esses alunos, no momento da revisão e da conclusão, fornecendo experiências e observações, porém não apresenta novas ideias ou atividades.

2.3 PROPRIEDADES DOS NÍVEIS.

Segundo van Hiele, as propriedades dos níveis, são de grande importância para o direcionamento do professor. É específico da teoria que o aluno seja apto a "passar" por todos os níveis, a seguir. Segundo OLIVEIRA (2012), as propriedades são:

2.3.1 Propriedade 1: Sequencial (Hierarquização e sequencialidade dos níveis)

Um aluno não pode atingir o nível sem ter passado pelo nível anterior, ou seja, seu desempenho em certo nível, dependerá do que foi absorvido no nível anterior.

2.3.2 Propriedade 2: Avanço (Adjacência)

Neste momento o avanço de nível é essencial e de suma importância e está ligado diretamente a tudo que foi trabalhado no nível anterior.

2.3.3 Propriedade 3: Intrínseco e Extrínseco (Distinção)

Em cada nível possuem símbolos e linguagem próprios e também suas próprias associações a esses símbolos.

2.3.4 Propriedade 4: Linguística (Separação)

A linguagem trabalhada em cada nível é diferenciada por isso, se duas pessoas que raciocinam em níveis diferentes não conseguem se entender.

2.3.5 Propriedade 5: Integração

As apresentações e recursos utilizados devem necessariamente, estar interligados ligados ao nível específico caso contrário, os alunos não compreenderão o que lhes será proposto.

3 POLIEDROS: CONCEITOS E CONSIDERAÇÕES.

Mas o que é poliedro? Poliedros são sólidos geométricos limitados por 4 ou mais faces planas poligonais. No dicionário a palavra Poliedro é formada por duas palavras gregas: ***polys*** que significa várias (dando origem ao prefixo poli) e ***hédrai*** que significa faces (dando origem ao sufixo edro). Eles são sólidos cuja superfície é formada por partes planas.

O poliedro é um sólido geométrico cuja superfície é formada por polígonos que são suas faces a definição de poliedro segundo Lima (2006):

> Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces, onde:
> (a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e, apenas um, outro polígono.
> (b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.
> (c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas). (LIMA,2006).

É impossível determinar a data do surgimento dos poliedros, pois já os egípcios os utilizavam na construção de suas imensas pirâmides, partindo apenas de um polígono e um ponto externo a ele.

Filósofos da Grécia Antiga se interessavam em estudar os poliedros. O filósofo Platão (400 A.C.) empenhou-se em desvendar todas as possibilidades de formação dos poliedros regulares, considerando o número e o formato das faces, desvendando suas propriedades e determinando seus nomes ele relacionava os poliedros regulares aos elementos da natureza, como água, terra fogo, ar e ao cosmo.

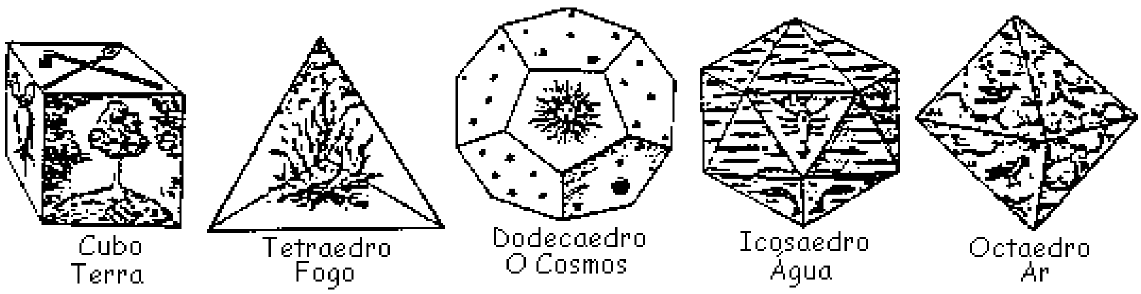


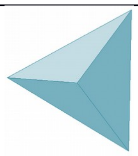
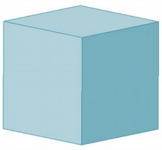
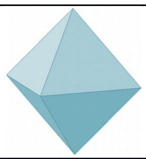
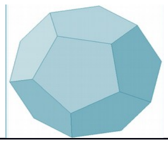
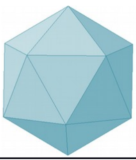
Figura 3 Sólidos de Platão relacionados aos elementos da natureza.
Disponível em: http://matematicana.blogspot.com/2007/04/slidos-platnicos.htm Acesso em Agosto de 2016.

3.1 Poliedros convexos regulares.

LIMA (2006) relata que um poliedro é convexo se o seu interior é convexo, isto é, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de seu interior está inteiramente contido nele. Em um poliedro convexo toda reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos.

Em outras palavras um poliedro é regular se toda a reta não paralela a nenhuma das faces corta-se no máximo, em dois pontos, duas de suas faces não são coplanares, cada lado da face poligonal é comum a duas, e se somente duas, faces poligonais, o plano que contém cada face poligonal divide o espaço de tal forma que toas as outras faces poligonais ficam em um único semi-espaço. Esses poliedros são conhecidos como os cinco Poliedros de Platão, e são eles: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro (Fig. 04).LIMA(2006).

Sua nomenclatura se dá pelo número de suas faces. Como mostra a tabela a seguir:

POLIEDRO	Nº DE FACES	NOME
	4 FACES TRIAGULARES	TETRAEDRO
	6 FACES QUADRADAS	HEXAEDRO (CUBO)
	8 FACES TRIANGULARES	OCTAEDRO
	12 FACES PENTAGONAIS	DODECAEDRO
	20 FACES TRIANGULARES	ICOSAEDRO

Quadro 01- Polígonos plotados pelo software Poly Pro. Disponível em http://poly-pro.softonic.com.br/download.

3.2: POLIEDROS CONVEXOS NÃO REGULARES.

Alguns sólidos geométricos são conhecidos como “não regulares” ou “irregulares”, podemos defini-los como aquele que não admite lei de geração que o caracterize com perfeição, ou seja, não há uma relação existente entre o número de faces, arestas e vértices. Suas faces são formadas por polígonos regulares e também irregulares.

Os polígonos irregulares são aqueles que se desenvolvem através da união de uma quantidade de segmentos denominados lados, ele não possui os ângulos com medidas iguais e seus lados não possuem o mesmo tamanho. A origem etimológica do conceito tem origem grega e significa “muitos ângulos”. Os polígonos irregulares possuem diferentes formas, e são classificados de acordo com as suas características, exemplo:

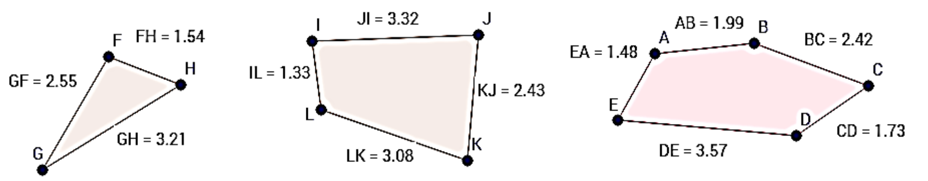


Figura 4- Triângulo Irregular, quadrilátero irregular e pentágono irregular.

Figuras plotadas a partir do software Geogebra. Disponível em https://www.geogebra.org/ Acesso em Junho de 2016.

Os Poliedros não regulares mais conhecidos são os prismas(anti-pisma) e as pirâmides.

Os prismas são sólidos geométricos formados por uma face superior e inferior planas e congruentes, suas laterais são compostas por quadriláteros ou paralelogramos. Os primas se dividem em dois grupos dependendo da inclinação das arestas laterais, os prismas são classificados em retos ou oblíquos.

As pirâmides são sólidos geométricos formados por uma base poligonal e um vértice que une todas as faces laterais que são triangulares. Para determinar a quantidade de lados de uma pirâmide devemos observar sua base poligonal, onde a quantidade de lados do polígono determina a quantidade de faces da pirâmide.

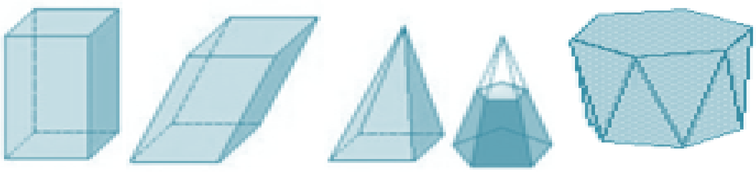
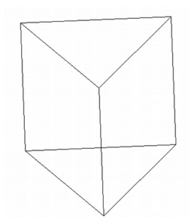
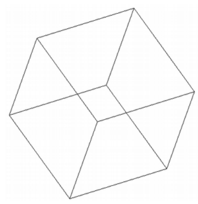
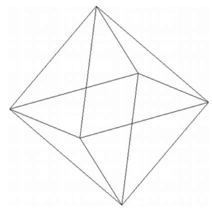
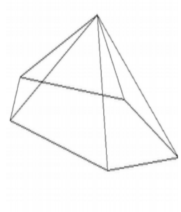


Figura 5-Alguns exemplos de poligonos irregulares: Prisma reto ,Prisma Obliquo, Piramide Reta, Piramide Truncada e Anti-prisma Pentagonal

Disponível em http://pt.slideshare.net/SARABELY13/poliedros-36030254/2 Acesso em Setembro de 2016

3.2.1 Relação de Euler

A relação foi desenvolvida pelo matemático suíço Leonhard Euler(1707-1783) essa relação é de extrema importância para a determinação do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo. Em sua definição $\boldsymbol{V - A + F = 2}$, em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro. Vejamos alguns exemplos:

Poliedro				
F	**5**	**6**	**8**	**7**
A	**9**	**12**	**12**	**12**
V	**6**	**8**	**6**	**7**
V-A+F	**6-9+5=2**	**8-12+6=2**	**6-12+8=2**	**7-12+7=2**

Quadro 02- Relação de Euler

3.2.2 Propriedades- Soma das medidas dos ângulos das faces.

Num poliedro convexo, a soma das medias dos ângulos de todas as faces é dada por: $\boldsymbol{S = (V - 2)\ .\ 360°}$ Sendo $\boldsymbol{V}$ o número de vértices.

Exemplo: Determinar a soma das medias das medidas dos ângulos das faces de um prisma cuja é um hexágono.

Resolução*: Ele possui 2 bases e 6 faces laterais, num total de 8 faces*

6 arestas em cada base e 6 arestas laterais, num total de 18 arestas.

Pela relação de Euler temos: $A+2=V+F\ ,\ \Rightarrow 18+2=V+8\ \therefore\ V=12$

$S=(12 - 2)\ .\ 360° \Rightarrow S = 10.\ 360°\ \therefore\ 3600°$

A soma das medidas dos ângulos das faces do prisma hexagonal é 3600°.

3.3 POLIEDROS NÃO CONVEXOS.

Pode se definir um poliedro não convexo, o polígono em que o plano de pelo menos uma face divide o poliedro em duas ou mais partes.

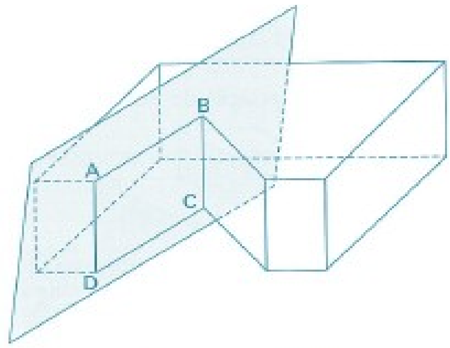


Figura 6 (Fonte: DANTE, 2012)

Podemos ainda observar ainda que quando existe um seguimento que liga dois de seus pontos e que não está totalmente contido nele também é um polígono não convexo (Fig. 8).

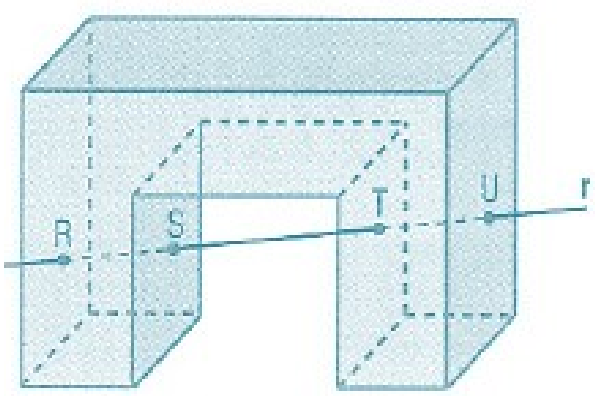


Figura 7 (Fonte: DANTE, 2012)

3.4 POLIEDROS ARQUIMEDIANOS.

Os poliedros arquimedianos (ou semi-regulares), são também poliedros convexos com faces poligonais regulares porém, possui mais de um tipo de polígono em suas faces, seus vértices são congruentes, isto é, e todo vértice pode ser transformado, através da simetria do poliedro, em outro.

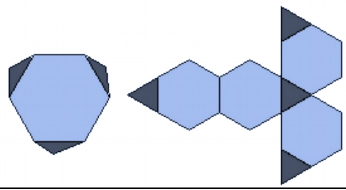
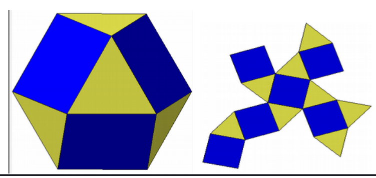
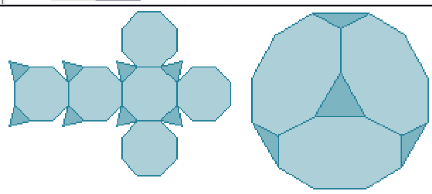
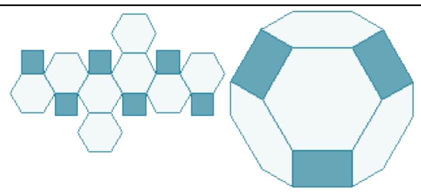
Esses poliedros recebem este nome porque, foi Arquimedes (287-252 a.C.), quem os estudou, ele fez novas descobertas relacionadas aos poliedros, tomando para si poliedros semirregulares, criados sob as seguintes condições: As faces são polígonos regulares de mais de um tipo e todos os seus vértices são congruentes. Estes estudos estão descritos no quinto livro de *Mathematical* Collection, escrito pelo matemático grego Pappus (290 a 350 a.C.). BICALHO(2013).

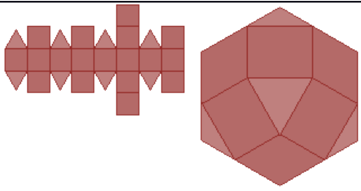
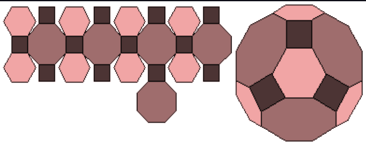
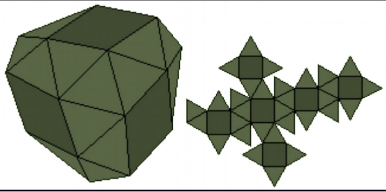
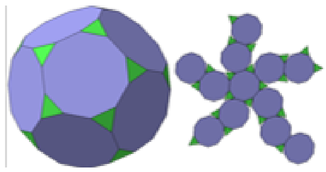
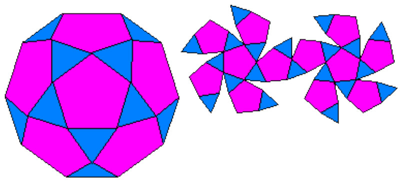
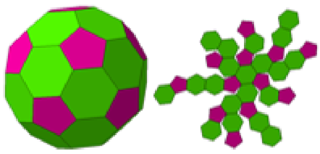
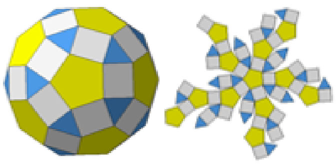
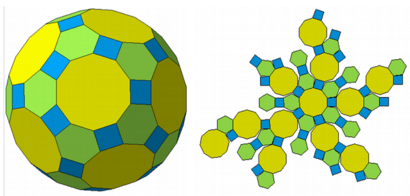
São treze os poliedros de Arquimedes e esses sólidos podem ser obtidos por meio das transformações dos cinco sólidos de Platão, fazendo operações hoje conhecidas como truncamento e snubificação.

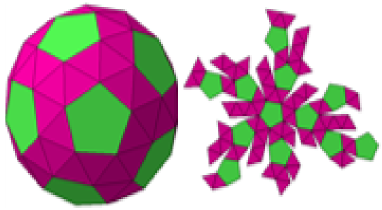
3.4.1 Truncamento de um poliedro e Snubificação de um poliedro

O truncamento consiste em cortar parcial e simetricamente todos os vértices e/ou arestas de um sólido, ângulos sólidos iguais ou simétricos. Estas faces são de dois ou, mesmo, três tipos e os ângulos são triédricos, tetraédricos ou pentaédricos. Treze dos poliedros de Arquimedes são obtidos truncando os sólidos platônicos. ALMEIDA(2010).

A snubficação de um poliedro é uma operação sobre um poliedro que permite obter outro poliedro. A operação consiste em afastar todas as faces do poliedro, rodar as mesmas um certo ângulo (normalmente 45º) e preencher os espaços vazios resultantes com polígonos (triângulos, retângulos, pentágonos, etc.). O caso especial de uma snubificação sem rotação chama-se expansão de sólido.

NOME	FORMA/ PLANIFICAÇÃO	COMPOSIÇÃO
TRONCOTETRAEDRO		8 FACES 4 TRIÂNGULOS 4 HEXÁGONOS
CUBOCTAEDRO		14 FACES 8 TRIÂNGULOS 6 QUADRADOS
TRONCO CUBO		14 FACES 8 TRIÂNGULOS 6 OCTÁGONOS
TRONCOCTAEDRO		14 FACES 6 QUADRADOS 8 HEXÁGONOS

ROMBICUBOCTAEDRO		26 FACES 8 TRIÂNGULOS 18 QUADRADOS
TRONCOCUBOCTAEDRO		26 FACES 12 QUADRADOS 8 HEXÁGONOS 6 OCTÁGONOS
CUBOROMBO (SNUB-CUBO)		38 FACES 32 TRIÂNGULOS 6 QUADRADOS
DODECAEDRO TRUNCADO		32 FACES 20 TRIÂNGULOS 12 DECÁGONOS
DODECAICOSAEDRO		32 FACES 20 TRIÂNGULOS 12 PENTÁGONOS
TRONCOICOSAEDRO (ICOSAEDRO TRUNCADO) (BOLA DE FUTEBOL)		32 FACES 12 PENTAGONOS 20 HEXÁGON OS
ROMBICOSIDODECAEDRO		62 FACES 20 TRIÂNGULOS 30 QUADRADOS 12 PENTÁGONOS
TRONCOICOSIDODECAEDRO (ICOSIDODECAEDRO TRUNCADO)		62 FACES 30 QUADRADOS 20 HEXÁGONOS 12 DECÁGONOS

ICOSIDODECAEDRO SNUB		92 FACES 60 TRIÂNGULOS 12 PENTÁGONOS

Quadro 03- Poliedros de Arquimedes-plotagem feita através do software Poly Pro

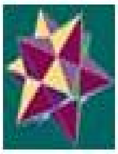
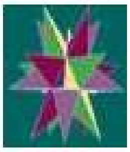
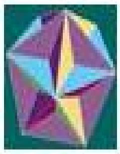
3.5 POLIEDROS DE KEPLER-POINSOT:

Em 1619 o alemão Kepler (1571-1630) descreve em uma de suas contribuições, provou que, além dos prismas e antiprismas, apenas podem existir treze poliedros arquimedianos, ele os descreve em seu trabalho *Harmonice Mundi,* onde define poliedros e prismas, embora as ilustrações desses poliedros já existissem, Kepler recebeu os créditos por ser o primeiro a considerá-los matematicamente. Nesta obra ele apresenta poliedros que são conhecidos hoje como Poliedros de Kepler-Poinsot ou poliedros estrelados.

De acordo com Kepler o estrelamento consiste em prolongar os lados de um polígono de cinco ou mais lados, até se encontrarem em um novo vértice. Com este prolongamento, obteremos um polígono regular não-convexo. Esses novos polígonos recebem o sufixo grama, como em pentagrama, hexagrama e assim por diante. Ele apresentou dois poliedros a partir do pentagrama, o Pequeno Dodecaedro Estrelado e o Grande Dodecaedro Estrelado, ambos tendo como faces 12 pentagramas.

Em 1810, Poinsot (1777-1859) descobre os quatro estrelados, mas existem indicações de que Poinsot compreendeu que num certo sentido estes quatro poliedros eram regulares. Não existe no entanto a certeza que Poinsot não conhecesse a anterior descoberta de Kepler. No entanto Cauchy, no século XIX, provou que os quatro poliedros de Kepler-Poinsot são os únicos

regulares não-convexos.

Poliedros de Kepler-Poinsot			
			
pequeno dodecaedro estrelado	grande dodecaedro estrelado	grande dodecaedro	icosaedro estrelado

Quadro- 4- Disponível emhttp://2.bp.blogspot.com/-oOuSBpvsRlE/T6WXI0kRtmI/AAAAAAAAAHs/2-tX3N5HNh8/s1600/imagem+7.JPG Acesso em Setembro 2016

3.6 PRISMAS E ANTIPRISMAS:

Prismas são poliedros com duas faces (bases) congruentes e paralelas e cujas faces restantes (as faces laterais) são paralelogramos. Eles são nomeados de acordo com o polígono de suas bases. Dizemos que são retos se suas faces laterais forem perpendiculares às bases, ou oblíquos se não forem atendas as definições anteriores. Além disso, um prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

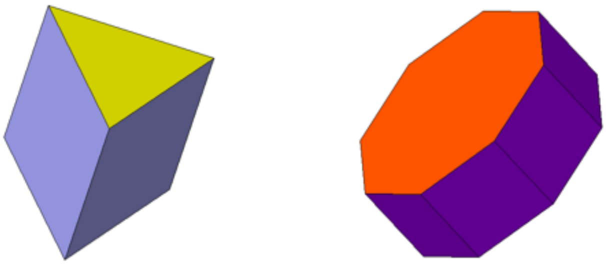


Figura 8 Prisma Triangular- Prisma octogonal

Um antiprisma é um poliedro que consiste de dois polígonos regulares de ***n*** lados (as bases) situados em planos paralelos, de modo que o segmento ***h*** que liga seus centros seja perpendicular aos planos das bases e, de forma que cada vértice da base superior seja equidistante de dois vértices da base inferior (ALLAN, 1997). Observamos ainda, que, os antiprismas de faces regulares também são arquimedianos, porém, não é comum incluir essas duas classes na família dos poliedros de Arquimedes.

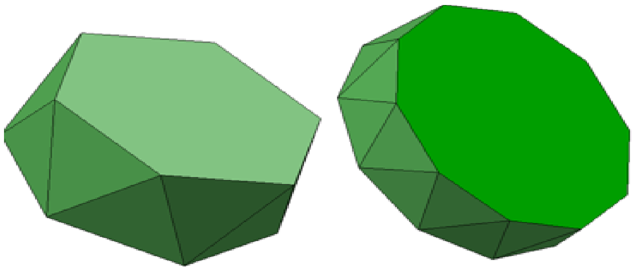


Figura 09-Antiprisma hexagonal e Antiprisma dodecagonal

3.7 DIPIRÂMIDES E DELTOEDROS

As Dipirâmides são duais de Primas e formadas por triângulos congruentes, normalmente isósceles, apenas as dipirâmides formadas por triângulos equiláteros são as de base triangular, quadrada e pentagonal.

Os Deltoedros são duais de Antiprismas e são formados por deltoides congruentes. Existe uma infinidade de Dipirâmides e Deltoedros tanto quanto Prismas e Antiprismas.

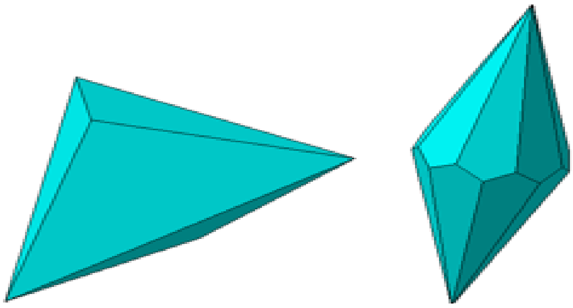


Figura 10- Didipirâmide Triangular e Deltoedro Octogonal

3.8 DUALIDADE E POLIEDROS DE CATALAN

De acordo com J. Malkevitch, o primeiro estudo sistemático da dualidade nos poliedros deve-se a E. C. Catalan, que num texto intitulado "Mémoire sur la théorie des polyèdres", publicado em 1865, apresenta a lista dos duais dos poliedros arquimedianos.[1]

A unificação do conceito de dualidade, que seja apropriado para uma categoria geral de poliedros, ainda não existe nenhum relato e será mesmo porventura impossível.

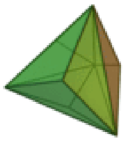
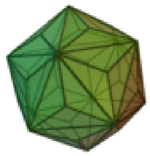
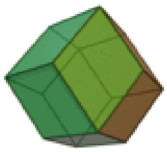
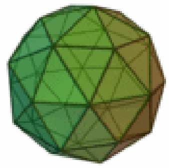
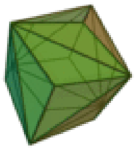
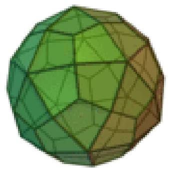
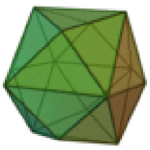
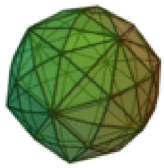
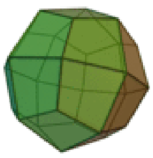
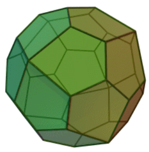
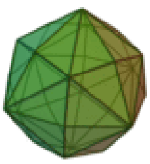
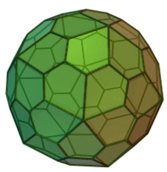
Os sólidos de Catalan, nome é uma homenagem ao matemático belga Eugènes Charles Catalan, não possuem regularidade, pois apesar de não terem faces regulares, todas as faces são de uma única forma, uma outra característica destes sólidos é que eles possuem dois ou

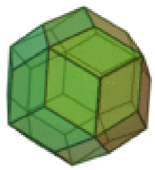
1 Kemp, obra citada, pág. 54. O livro de Kemp trata longamente das relações entre Dürer e a geometria, e descreve em detalhe o conteúdo do tratado de Dürer Underweyssung der messung

mais tipos de vértices. Além disso, dois desses sólidos, o Dodecaedro rômbico e o Triacontaedro rômbico, tem todas as arestas idênticas, pois em ambas as faces são losangos.

O dual do Cubo é o Octaedro, assim, o dual do Octaedro é o Cubo. O dual do Dodecaedro é o Icosaedro. Somente o Tetraedro é dual de si mesmo. Podemos observar que um poliedro pode ter mais de um dual. Por exemplo, um octaedro não regular também é um dual do cubo.

Vejamos na tabela a seguir os poliedros de Catalan:

NOME	FORMA	NOME	FORMA
Tetraedro Triakis Dual: Tetraedro truncado faces: 12 Triângulos Isósceles		**Icosaedro Triakis** Dual: Dodecaedro truncado Faces: 60 Triângulos Isósceles	
Dodecaedro Rômbico Dual: cuboctaedro Faces: 12 Losangos		**Dodecaedro Pentakis** Dual: Icosaedro truncado Faces: 60 Triângulos Isósceles	
Octaedro Triakis Dual: Cubo truncado Faces: 24 Triângulos Isósceles		**Hexecontaedro Deltoidal** Dual: Rombicosidodecaedro Faces: 60 Deltóides	
Hexaedro Tetrakis Dual: Octaedro truncado Faces: 24 Triângulos Isósceles		**Triacontaedro Disdiakis** Dual: Icosidodecaedro truncado Faces: 120 Triângulos Escalenos	
Icositetraedro Deltoidal Dual: Rombicuboctaedro Faces: 24 Deltóides		**Icositetraedro Pentagonal** Dual: Cubo snub Faces: 24 Pentágonos Irregulares	
Dodecaedro Disdiakis Dual: Cuboctaedro truncado		**Hexecontaedro Pentagonal** Dual: Icosidodecaedro snub	

Faces: 48 Triângulos Escalenos		Faces: 60 Pentágonos Irregulares	
Triacontaedro Rômbico Dual: Icosidodecaedro Faces: 30 Losangos			

Quadro 5 Sólidos de Catalan, disponível em
http://pt.wikipedia.org/wiki/Sólidos_de_Catalan Acesso e, Setembro de 2016

3.9 POLIEDROS DE JOHNSON:

Em 1966, Norman W. Johnson listou 92 poliedros convexos de faces regulares, em seu trabalho publicado no *Canadian Journal of Mathematics*, que não eram platônicos nem arquimedianos, nem prismas, nem antiprismas, formados por mais de um tipo de polígono e vértices não-congruentes. Johnson nomeou todos eles e sugeriu que não haveria mais nenhum. Duarte (2010). Vejamos tres dos 92 poliedros listados por Johnson

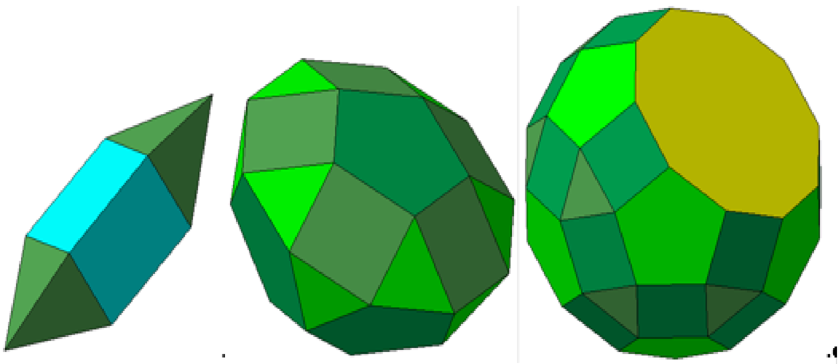


Figura 11- Dipirâmide Triangular Elongada, Rombicosidodecaedro Paradibisminuido e Ortocupolarrotunda Pentagonal.

3.10 ESFERAS E DOMOS GEODÉSICOS

Uma esfera geodésica é uma estrutura composta de uma trama de triângulos que dá forma a uma superfície aproximadamente esférica. Quanto maior o número de triângulos na trama, mais próxima a esfera geodésica estará de uma esfera.

Figura 12- Cúpula geodésica. Disponível em http://www.astronoo.com/pt/artigos/fulereno.html Acesso em Outubro 2016.

Esses sólidos são classificados de acordo com suas frequências. Frequências mais altas podem ser construídas a partir dos já existentes e garantindo que todos os vértices sejam equidistantes do centro do poliedro sendo assim quanto maior a frequência, mais triângulos tem o sólido. Três sólidos platônicos, o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, são esferas geodésicas de frequência.

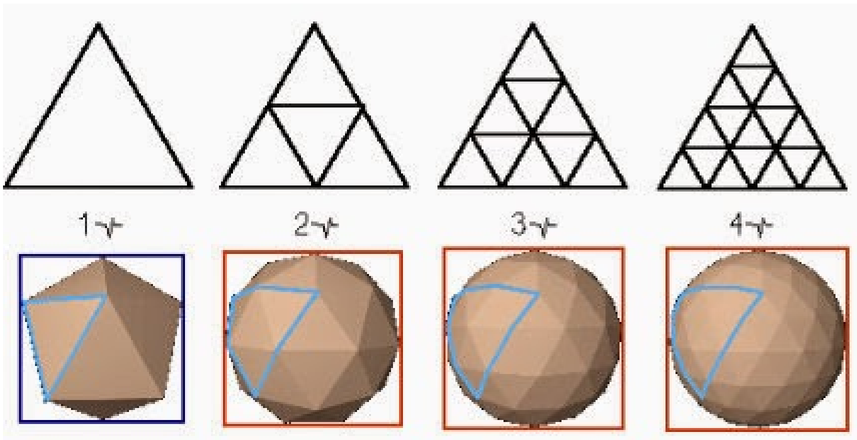


Figura 13- Frequência Geodésica. Disponível em http://ebioconstrucao.blogspot.com.br/p/aqui-listamos-um-passo-passo-para.html Acesso em Outubro de 2016

Domos geodésicos ou abóbadas geodésicas são partes fracionadas da esfera Geodésica. O hemisfério geodésico é um domo em particular, obtido por um corte que divide a esfera geodésica em duas partes iguais.

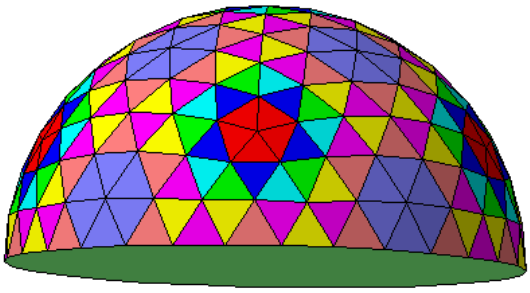


Figura 14- Hemisfério Geodésico Icosaédrico de frequência 6. Plotado em Poly Pro

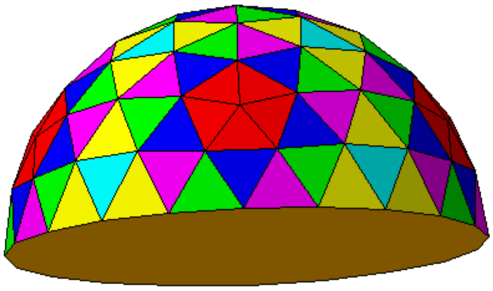


Figura 15- Hemisfério Geodésico Icosaédrico de frequência 4. Plotado em Poly Pro

4. UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

Para realização desta proposta, selecionei uma turma do 9º Ano do E. F. de uma escola particular da cidade de Pompéu.

Existem diversos relatos da utilização de objetos concretos na construção de sólidos geométricos, como por exemplo: canudos, palitos para churrasco, etc. Para esta proposta utilizaremos a metodologia de van Hiele (os três primeiros níveis), através da manipulação de balas de goma ou jujubas (Recebe nome diferente dependendo da região brasileira) e palitos de dente. As atividades se iniciaram no mês de setembro de 2016.

4.1. TURMA 9º ANO ENSINO FUNDAMENTAL- INFORMAÇÕES

É uma turma pequena, que estuda no período matutino, ela é composta por 6 alunos,4 meninos e 2 meninas. Com idades entre 13 e 14.

IDADE	MENINOS	MENINAS
13	2	1
14	2	1

Quadro 6- Turma: 9º Ano- Perfil dos alunos

Foi trabalhado nesta turma a teoria de van Hiele (os três primeiros níveis) em relação ao desenvolvimento do pensamento geométrico no estudo dos Poliedros. As atividades propostas foram um pouco mais elaboradas devido a um maior nível de conhecimento demonstrado por eles.

Foram necessárias 10 aulas de 50 minutos, totalizando 500 minutos. A turma foi dividida em três grupos de dois alunos, pois esta proposta requer supervisão detalhada para a realização de cada atividade.

Aula 1 e 2 – Aplicação da avaliação preliminar do conhecimento já adquirido em aulas anteriores. (Avaliação disponível no Anexo 1). Tempo utilizado: 1 hora e Quarenta minutos

Aula 3 e4 – Aplicação do nível 1. Tempo utilizado: 1 hora e 40 minutos

Aula 5 e 6 - Aplicação do nível 2. Tempo utilizado: 1 hora e 40 minutos

Aula 7 e 8- Aplicação do nível 3. Tempo utilizado: 1 hora e 40 minutos

Aula 9 e 10 - Aplicação do teste final e interação entre os alunos. Tempo utilizado: 1 hora e 40 minutos

4.2 TESTE INICIAL

Para ter conhecimento do nível atual dos alunos, em relação ao conteúdo proposto, foi aplicado um teste (disponível no anexo I), onde, através dos resultados obtidos, foi possível planejar detalhadamente as atividades a serem trabalhadas em cada nível.

4.2.1 NÍVEL 1- visualização

Neste nível apresentei alguns poliedros feitos de papel e também alguns dados poliédricos. Os alunos associam os poliedros a objetos presentes em seu cotidiano, como por exemplo, o hexaedro é chamado de “dado”. Neste momento, as propriedades dos poliedros ainda não são reconhecidas contudo, já é possível nomear e diferenciar alguns sólidos.

1ª Fase: Coleta de Informações

Foi distribuído em cada grupo de alunos, alguns sólidos, dados poliédricos de diferentes quantidades de faces e folha para anotação.

Pedi aos alunos um que examinassem os poliedros que lhes entreguei, em seguida solicitei que anotassem as características presentes em cada um, em seguida que comparassem estes objetos a algo que estivesse presente em seu cotidiano.

Observei que eles ficaram atentos as quantidades de “lados” ou seja, de faces, pois eles ainda não demostraram conhecimento em relação aos vértices e arestas presentes em cada poliedro, ainda não conhecem suas propriedades.

2ª Fase: Orientação dirigida.

Nesta fase distribui em cada grupo, um pacote de jujubas, uma caixa de palitos de dente e uma folha pra anotação.

Solicitei a eles que fizessem construções poliédricas, de forma livre, em seguida anotassem as informações de suas construções, como a quantidade de faces, de vértices e arestas. Em seguida trocassem com os outros grupos de alunos, de maneira que todos os alunos anotassem as características de todas as construções realizadas.

Pude observar o interesse e dedicação de cada aluno, na realização desta atividade, na atenção ao manipular as construções de maneira a observar todas as informações

Fase 3: Apresentação.

Este foi o momento em que cada grupo fez uma apresentação falando sobre suas construções, nome, quantidade de faces, vértices e arestas.

Foi um momento muito interessante, acompanhei atentamente, cada apresentação, fiz intervenções quando necessário. Alguns alunos eram mais desinibidos ao apresentar, outros demostravam certa apreensão, mas ocorreu tudo bem.

Fase 4: Orientação Livre

Nesta fase distribui aos alunos de cada grupo uma quantidade certa de palitos e jujubas, sendo o grupo 1: 4 jujubas e 6 palitos, ao grupo 2: 8 jujubas e 12 palitos e ao grupo 3 6 jujubas e 12 palitos. Solicitei a cada um que construíssem um poliedro da seguinte maneira: grupo 1: apenas com faces triangulares; grupo 2: apenas com faces quadradas; grupo 3 apenas faces triangulares.

Como já era o esperado, o grupo 3 apresentou certa dificuldade no início, mas logo já conseguiram realizar a construção do octaedro.

Fase 5: Integração.

Nesta fase os grupos fizeram uma síntese de tudo que visto e trabalhado nas fazes anteriores. Neste momento foram revisados todos os conteúdos, de forma detalhada e organizada. Apliquei um questionário sobre este nível.

4.2.2 NÍVEL 2: Análise

Neste nível começa o estudo mais detalhado das propriedades dos poliedros, de maneira mais detalhada. O estudo das propriedades de um poliedro é feito por meio de demonstração de uma propriedade em um ou mais casos.

Fase 1: Informação

Apresentei aos alunos alguns tipos de poliedros, mas a ênfase maior foi em relação aos poliedros de platônicos. Nesta fase a explicação foi mais informal e não entrei em pequenos detalhes.

Distribui entre os grupos um dodecaedro, um hexaedro e um tetraedro, todos feitos a partir de canudos e linha de costura, junto a este material, entreguei uma tabela específica para cada poliedro. Solicitei a eles que através da manipulação destes poliedros, eles preenchessem a tabela com o número de faces, vértices e arestas.

Fase 2: Orientação dirigida

Nesta fase, distribui aos alunos, jujubas, palitos de dente tesoura, cola e um pedaço de cartolina. Solicitei a eles que com este material construíssem um icosaedro.

A construção realizada com a utilização destes materiais, possibilitou aos alunos, uma visualização mais detalhada. Disse a eles que analisassem por meio do Teorema de Euler.

Como demostrado na figura abaixo:

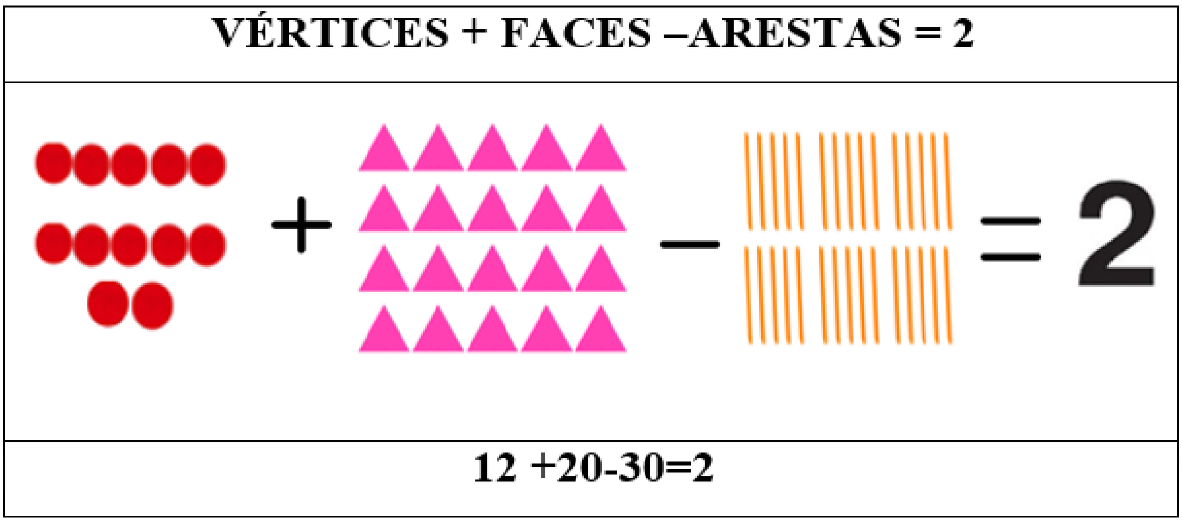


Figura 16- Teorema de Euler

Fase 3: Explicitação.

Este foi o momento que cada grupo pode apresentar suas construções, falar sobre suas dificuldades e o que aprenderam. Ocorreu uma interação entre os alunos, onde ouve participação de todos, eles demonstraram grande orgulho por terem conseguido realizar as construções.

Fase 4: Orientação livre

Distribui aos alunos uma folha com uma tabela com os nomes dos poliedros platônicos, em seguida solicitei a eles que preenchessem a tabela com a quantidade de faces, vértices e arestas, determinei um tempo para que eles encontrassem as respostas.

Não exigi o método a ser utilizado, deixei que eles descobrissem sozinhos. Após o termino do tempo estipulado, fiz as correções, apresentando algumas possíveis maneiras de resolução. Desta forma ampliar um pouco mais seus conhecimentos.

Fase 5: Integração.

Os grupos fizeram e apresentaram suas sínteses. Fiz algumas intervenções e houve interação de todos. Apliquei um questionário sobre este nível.

4.2.3 NÍVEL 3: Dedução Informal

Neste nível os alunos já conseguem nomear poliedros observando a quantidade de faces, eles ainda utilizam uma linguagem informal, mas eles conseguem fazer definições dos conceitos poliédricos.

Fase 1: Informação.

Esta fase foi trabalhada de forma mais teórica, formal e detalhada, através da demonstração de algumas propriedades.

Fase 2: Orientação dirigida.

Distribui aos alunos uma lista de atividades relacionadas ao que foi visto até aqui. Abordei algumas questões teóricas e esclareci dúvidas. Permiti ainda o uso das construções realizadas pelos alunos. Ao termino fiz a correção das atividades, apresentei mais alguns exemplos e aplicações.

Fase 3: Explicitação.

Cada grupo fez um pequeno resumo de todo o conteúdo aprendido nesta fase, em seguida promovi um debate e exposição de opiniões. Fazendo intervenções quando necessário.

Fase 4: Orientação livre

Nesta fase distribui aos grupos, uma folha com uma atividade mais elaborada. Desta vez não permiti o uso das construções para resolverem as atividades.

Ao termino fiz as devidas correções e os alunos acompanharam atentos

Fase 5: Integração.

Solicitei aos alunos que fizessem uma síntese abordando todos os conteúdos abordados até o presente momento. Em seguida cada grupo falou um pouco de suas experiências e conhecimentos adquiridos até aqui, apresentaram suas próprias conclusões. Fiz algumas intervenções, o encerramento do trabalho.

4.3 TESTE FINAL E RESULTADOS OBTIDOS

O objetivo do teste, foi avaliar o nível de aprendizagem depois da aplicação da teoria de van Hiele, e detectar se houve vantagem ou desvantagem.

Sendo assim obtemos como vantagem o aprendizado demonstrado pelos alunos, a realização de uma aula prática e direcionada, como desvantagem, será necessário, um tempo maior para o professor elaborar este tipo de aula, mesmo assim o retorno é muito satisfatório.

4.3.1 Relatório

As notas obtidas no teste inicial e final, apresentaram uma diferença expressivas, pois os alunos estavam um pouco desinteressados, mas no decorrer da aplicação das atividades pude notar a mudança de atitude dos alunos, que refletiram nas notas obtidas no teste final. Assim como mostra as figuras a seguir.

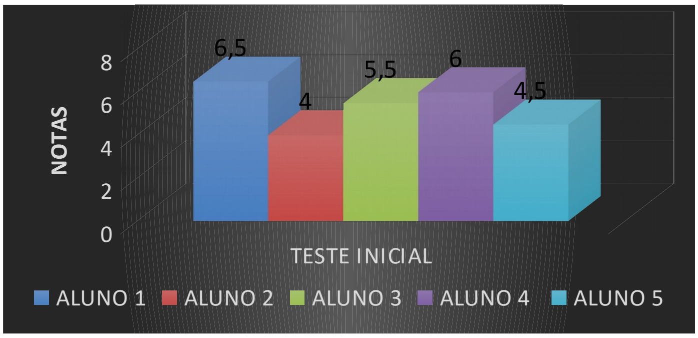


Figura 17- Notas Iniciais.

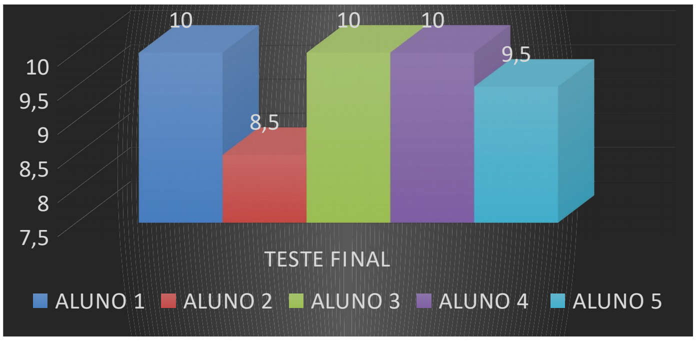


Figura 18- Notas Finais

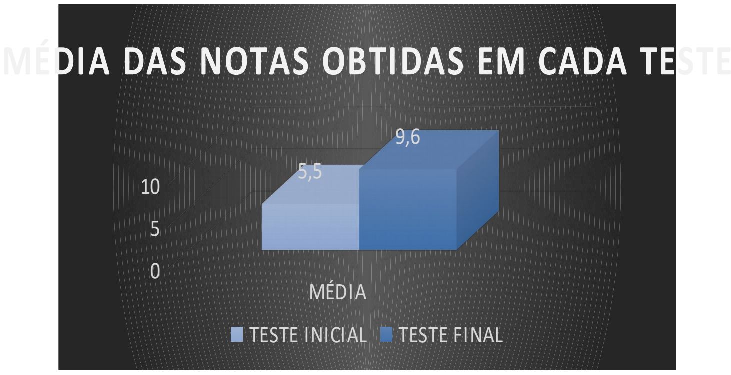


Figura 19- Média das Notas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No mundo em que vivemos, estamos rodeados de conceitos geométricos e construções tridimensionais, e este tem sido o foco, nas metodologias de Ensino Matemático, em todos os níveis de ensino. Tais propostas, assim como os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais), buscam inserir o ensino de Geometria Espacial já no Ensino Fundamental I (Anos Iniciais), Por meio do estudo dos poliedros, possibilitando ao aluno o primeiro contato com construções espaciais, em um primeiro momento de forma mais acessível, em seguida de forma representativa e por último operatória. Como vimos no teorema de van Hiele, os alunos ao passarem pelas etapas de ensino, estarão aptos a resolverem problemas matemáticos que envolve aspectos tridimensionais.

Diante da teoria de van Hiele o estudo teórico sobre a definição, os conceitos e as propriedades elementares dos Poliedros, o estudo da Relação de Euler e algumas demonstrações, desta forma o professor pode se apoiar para a elaboração e desenvolvimento conteúdos a serem apresentados em sala de aula.

O ensino de Geometria Espacial de forma tradicional, é muito precária e o docente conta com poucos recursos e materiais muitas vezes, que a escola não disponibiliza, ficando assim uma aula, difícil de ser transmitida, apenas com o uso de um livro didático, ficando assim o professor muitas vezes frustrado, e o aluno prejudicado. Por este motivo, este trabalho tem como objetivo promover uma proposta de ensino com qualidade e de maneira acessível, onde todos são beneficiados.

Desta forma, acredito que este trabalho auxilie o professor em sala de aula, de maneira sugestiva, pois se constitui de uma metodologia de aprendizagem sobre alguns conceitos relativos sobre Poliedros que, muitas vezes os alunos não tem acesso, e também de uma alternativa de atividade para que as aulas de geometria não aconteçam de forma tradicional e despertando tanto nos alunos quanto no professor de matemática o interesse na construção do conhecimento, de maneira que não se desviar do objetivo principal que é o estudo do conceito de Poliedros.

6 REFERÊNCIAS

ADELA JAIME, ***Aportaciones a la Interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele***, Universidade de Valência, 1993, Tese de Doutorado sob a orientação de Angel Gutierrez. Disponível em: http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf Acesso em Outubro 2016.

ALMEIDA, T. C. S. **Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no Renascimento.** 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: http://livros01.livrosgratis.com.br/cp137922.pdf Acesso em Setembro de 2016.

BATISTA; BARCELOS; AFONSO. ***Estudando Poliedros com Auxílio do Software Poly.*** Centro Federal de educação tecnológica de campos. Disponível em:http://www.edumat.com.br/wp-content/uploads/2008/11/apostila_poliedros_poly2006.pdf Acesso em Setembro de 2016.

BICALHO, J. B de Souza. ***Um estudo sobre poliedros e atividades para o ensino de matemática: Geometria da bola de futebol e pipa tetraédrica***. Disponível em http://alexandria.cpd.ufv.br:8000/teses/matematica/2013/250950f.pdf Acesso em Setembro de 2016.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. ***Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio***. Volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologia Brasília: MEC, 2006.

DANTE, L. R.. ***Matemática: Contexto e Aplicações***. São Paulo: Editora Ática, 2012. v.2.

DUARTE, P. J. Moreira. **Sólidos geométricos: história, conceitos e aplicações no ensino fundamental**. Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível em: http://docslide.com.br/documents/tcc5571f95749795991698f5c13.html Acesso em Agosto de 2016.

FONTES, L. F. A.; **Avaliação De Diferentes Metodologias Aplicadas Ao Ensino Da Geometria.** Trabalho de Conclusão de Curso de Pós Graduação stricto sensu de Mestrado Profissional em Matemática. IMPA 2015. Disponível em http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalho_conclusao_curso/2015/Luiz_Felipe_Andre_Fontes.pdf Acesso em Agosto 2016.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática completa-** 2. ed. renovada – São Paulo: FTD, 2005 (Coleção Matemática Completa) P. 253

GRÜNBAUM, B. ***Are Your Polyhedra The Same as My Polyhedra?***. Em Aronov, B.; Basu, S.; Pach, J.; Sharir, M. (editores). Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift. Springer-Verlag, pp. 461-588, 2003. Disponível em: http://www.math.washington.edu/~grunbaum/Your%20polyhedra-my%20polyhedra.pdf Acesso em Setembro 2016

HISTÓRIA DA GEOMETRIA – Poliedros. Disponível em http://www.apm.pt/apm/amm/paginas/231_249.pdf Acesso em outubro 2016.

KEPLER, J "1619, Harmonices Mundi." Libri V (1942).Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler Acesso em Setembro 2016.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER EDUARDO; MORGADO A. C.. **Matemática do Ensino Médio**, Volume 2.Rio de Janeiro: Editora Sociedade Brasileira de Matemática.

OLIVEIRA, M. C.; GAZIRE, E. S. **Resinificando a geometria plana no ensino médio, com auxílio de van hiele**. Belo Horizonte, 2012. Disponível em: http://www1.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20121128150635.pdf Acesso em: agosto de 2016.

PONTES, J. S. DE. "**Avaliação De Diferentes Metodologias Aplicadas Ao Ensino Da Geometria.**" (2014). Disponível Em http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/1104 Acesso em Setembro de 2016.

VAN HIELE, **El problema de la comprensión**, Universidade de Valencia, 1810, 16—48." Прочитано в июле (1809). Disponível em: http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf Acesso em Setembro 2016.

STEEN, L.A.; JOSEPH M. ***For all practical purposes: introduction to contemporary mathematics***. WH Freeman, 1991. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/2686729?seq=1#page_scan_tab_contents Acesso em Outubro 2016.

Toda Matéria. **Poliedro** Disponível em https://www.todamateria.com.br/poliedro/ Acesso em setembro de 2016.

USISKIN, Zalman. ***Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry***. ***Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry***. CDASSG Project. The University of Chicago. Chicago (USA). 1982. Disponível em: http://ucsmp.uchicago.edu/resources/van_hiele_levels.pdf Acesso em setembro 2016

7 ANEXOS

7.1Teste inicial

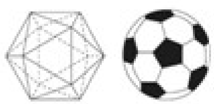
<table>
<tr><td rowspan="4">PROJETO
DE
PESQUISA</td><td colspan="2">TESTE FINAL</td></tr>
<tr><td>SÉRIE: 9º ANO</td><td>ENSINO: FUNDAMENTAL 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">VALOR: 10 PONTOS NOTA: ______</td></tr>
<tr><td colspan="2">ALUNO (A) ____</td></tr>
</table>

Questão 01

Um poliedro convexo tem 3 faces pentagonais e algumas faces triangulares. Qual o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares.

Questão 02

Arquimedes descobriu um poliedro convexo formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares. Esse poliedro inspirou a fabricação da bola de futebol que apareceu pela primeira vez na Copa do Mundo de 1970. Quantos vértices possui esse poliedro?



Questão 03

Determine o número de vértices, arestas, faces e a soma dos ângulos das faces dos poliedros convexo que possuem:

a) 6 faces triangulares e 4 faces quadrangulares.

b) 5 faces pentagonais 3 faces triangulares.

Questão 04

Quantas arestas tem um icosaedro?

Questão 05

Unindo-se o centro de cada face de um cubo, por segmentos de reta, aos centros das faces adjacentes, obtêm-se as arestas de um poliedro regular. Quantas faces tem esse poliedro?

Questão 6

A soma S das áreas das faces de um tetraedro regular em função de sua aresta é:

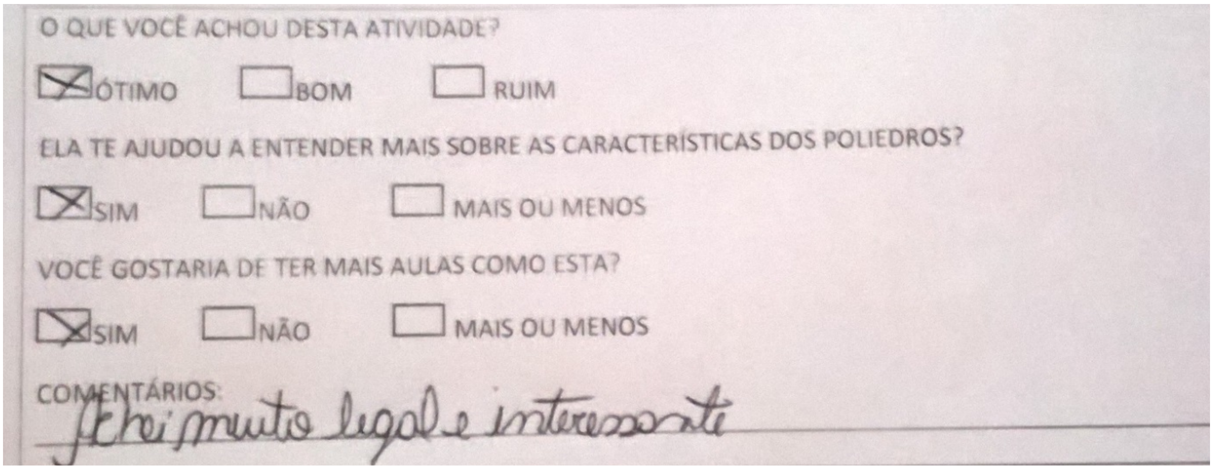
a) a^2.
b) $\sqrt{3}\, a^2$.
c) $4\, a^2$.
d) $\sqrt{5}\, a^2$.
e) $\sqrt{2}\, a^2$.

7.1.1 Teste Final

7.2 QUESTIONÁRIOS

Os questionários foram aplicados a cada nível, vejamos algumas respostas:

NÍVEL 1



O QUE VOCÊ ACHOU DESTA ATIVIDADE?

[X] ÓTIMO [ ] BOM [ ] RUIM

ELA TE AJUDOU A ENTENDER MAIS SOBRE AS CARACTERÍSTICAS DOS POLIEDROS?

[X] SIM [ ] NÃO [ ] MAIS OU MENOS

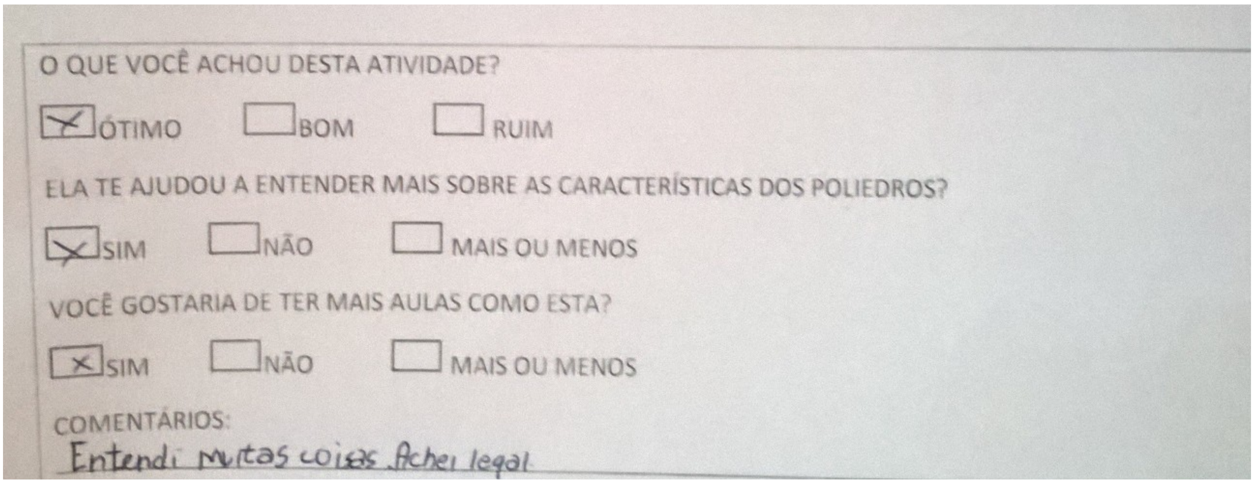
VOCÊ GOSTARIA DE TER MAIS AULAS COMO ESTA?

[X] SIM [ ] NÃO [ ] MAIS OU MENOS

COMENTÁRIOS: Achei muito legal e interessante

Figura 22 – Aluno Z

NÍVEL 2



O QUE VOCÊ ACHOU DESTA ATIVIDADE?

[X] ÓTIMO [ ] BOM [ ] RUIM

ELA TE AJUDOU A ENTENDER MAIS SOBRE AS CARACTERÍSTICAS DOS POLIEDROS?

[X] SIM [ ] NÃO [ ] MAIS OU MENOS

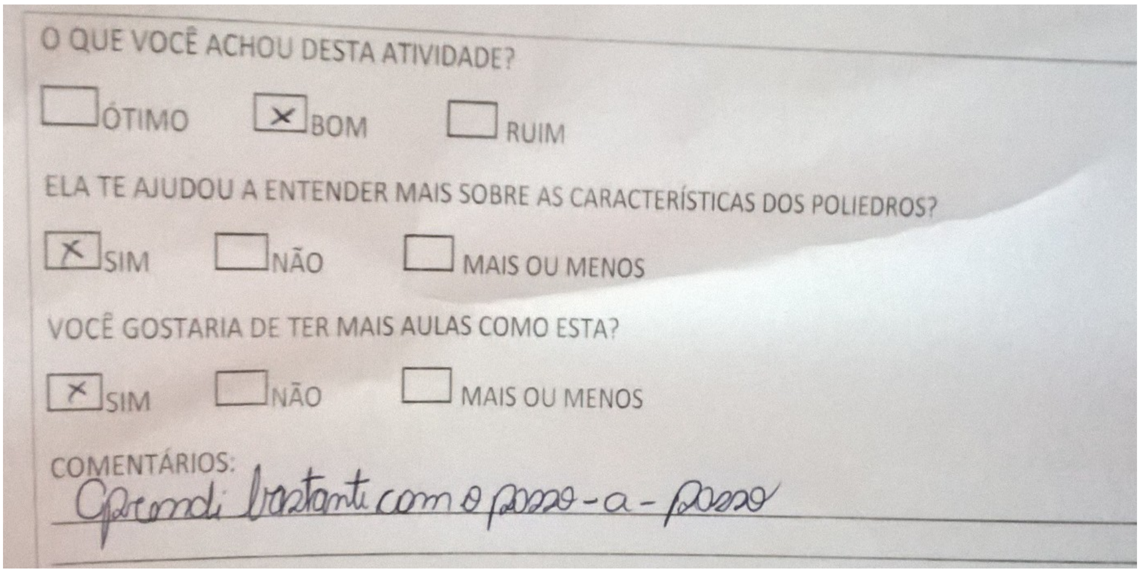
VOCÊ GOSTARIA DE TER MAIS AULAS COMO ESTA?

[X] SIM [ ] NÃO [ ] MAIS OU MENOS

COMENTÁRIOS: Entendi mutas coisas Achei legal

Figura 23- Aluno Y

NÍVEL 3



O QUE VOCÊ ACHOU DESTA ATIVIDADE?

[ ] ÓTIMO [x] BOM [ ] RUIM

ELA TE AJUDOU A ENTENDER MAIS SOBRE AS CARACTERÍSTICAS DOS POLIEDROS?

[x] SIM [ ] NÃO [ ] MAIS OU MENOS

VOCÊ GOSTARIA DE TER MAIS AULAS COMO ESTA?

[x] SIM [ ] NÃO [ ] MAIS OU MENOS

COMENTÁRIOS:
Aprendi bastanti com o passo-a-passo

Figura 24- Aluno W

7.3 FOTOS DOS ALUNOS E SUAS CONSTRUÇÕES

Foto 1 - Nível 1- Fase 1

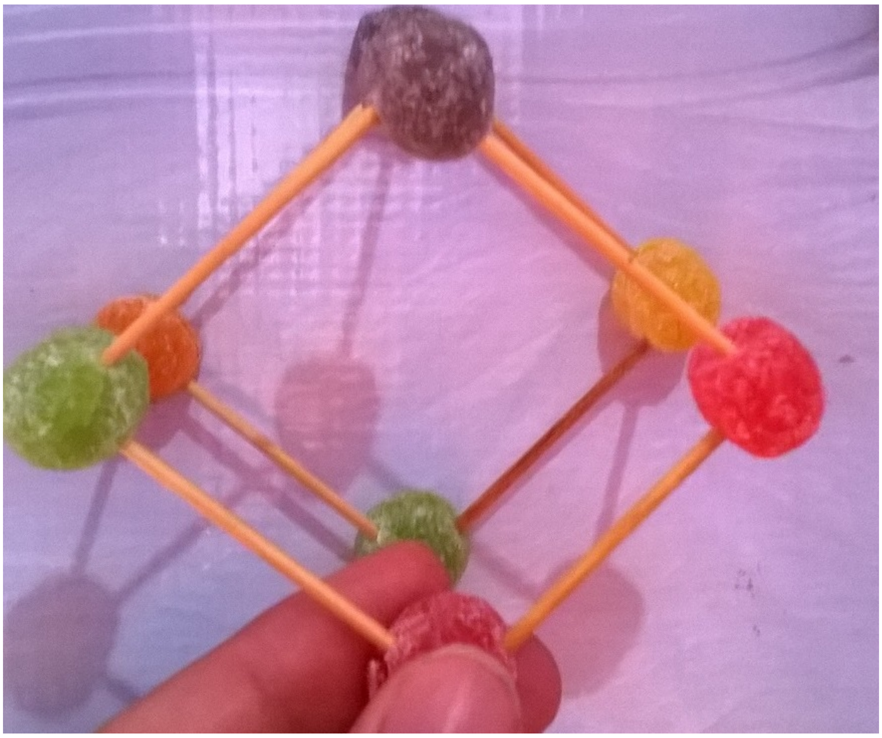


Foto 2- Nível 1 – Fase2 construção feito pelos aluno.

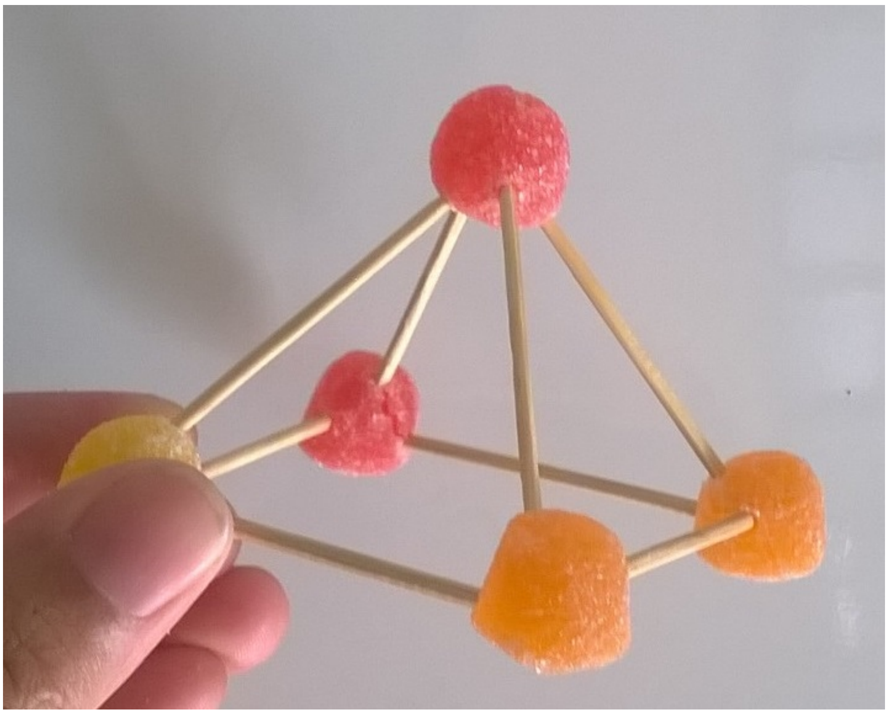


Foto 3- Nível 1 – Fase2 construção feito pelos aluno.

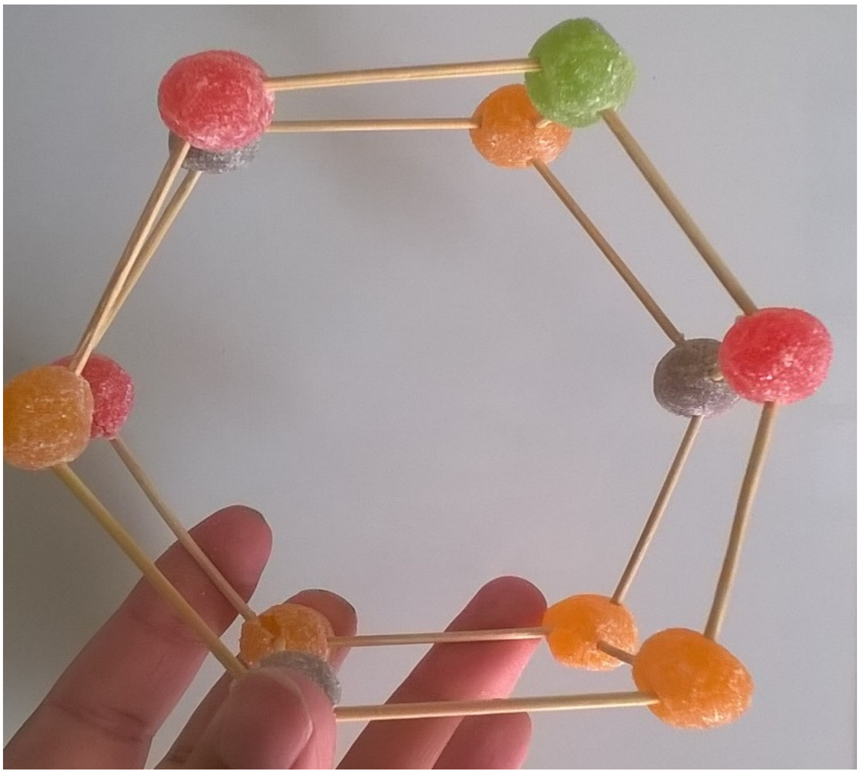


Foto 4- - Nível 1 – Fase2 construção feito pelos aluno.

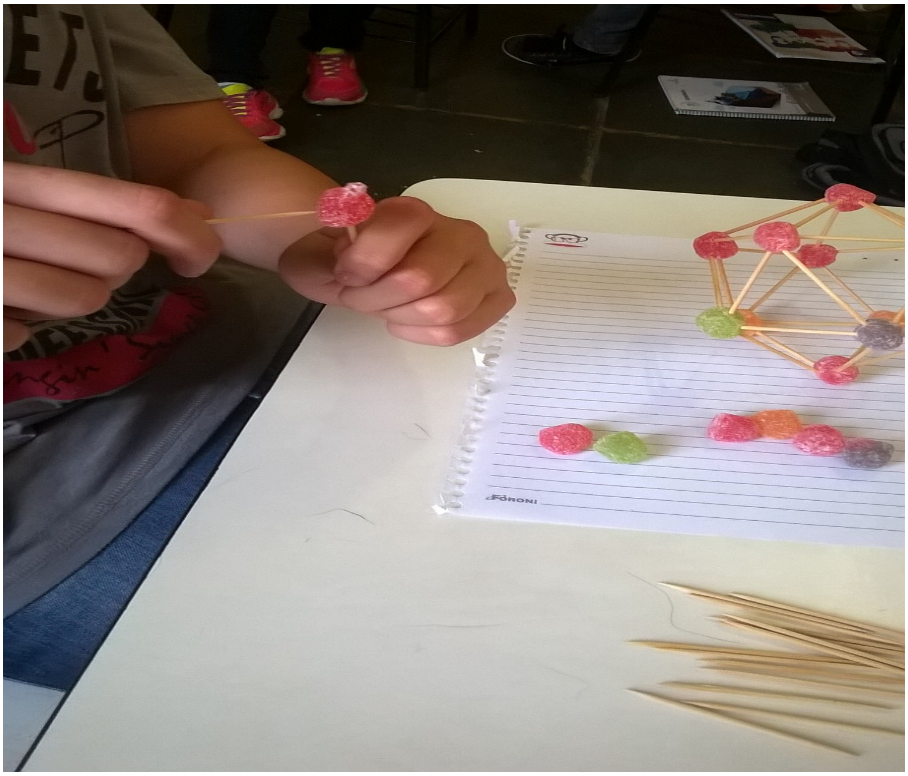


Foto 3- Nível 2 - Fase 1

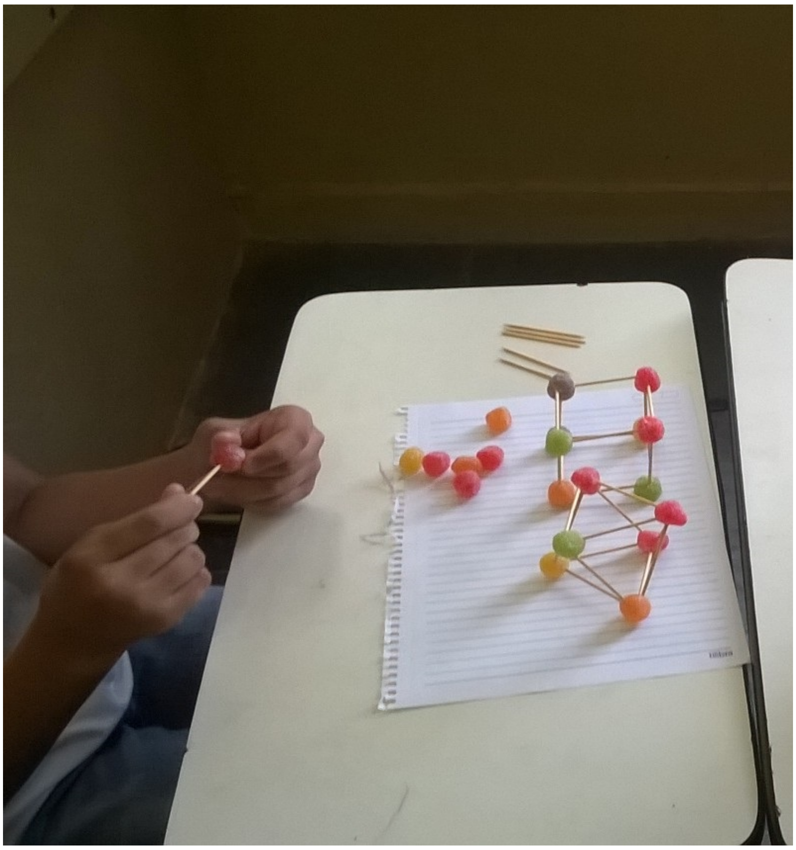


Foto 4– Nível 2 – Fase 1

Foto 5- Alunos apresentando suas construções

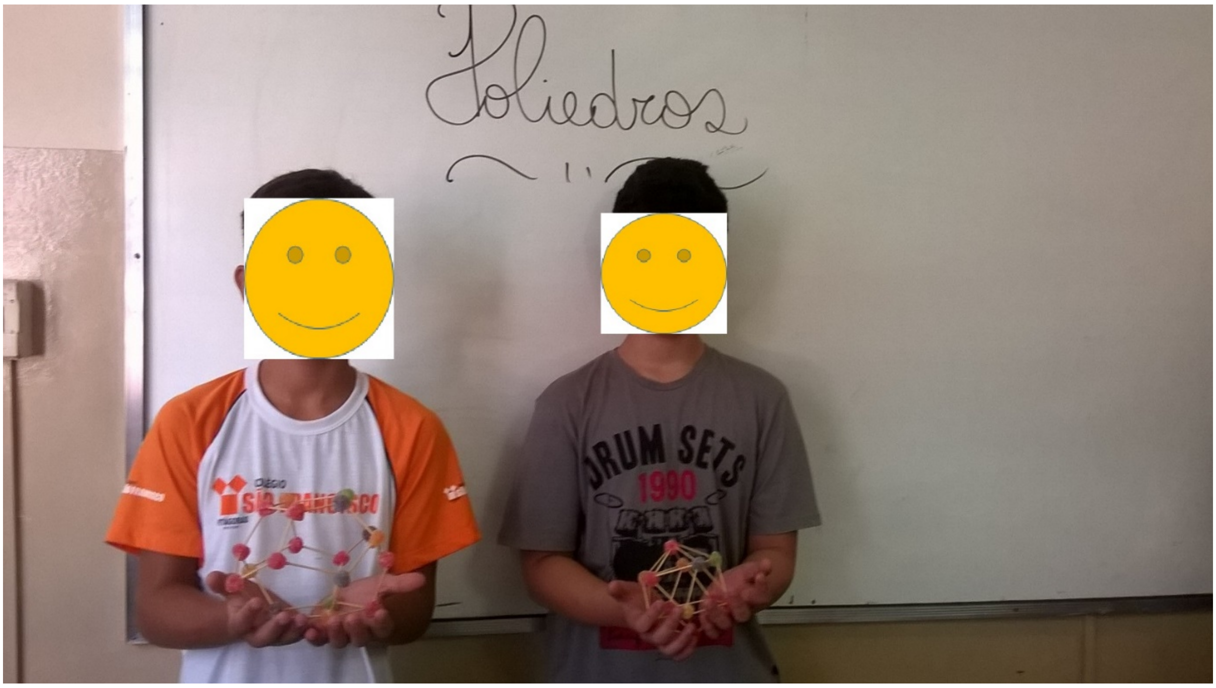


Foto 5- Alunos apresentando suas construções

Foto 6- Alunos convidados para conhecer o trabalho realizado pela Turma do 9º Ano

Foto 7- Alunos convidados para conhecer o trabalho realizado pela Turma do 9º Ano