**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI**

**CHAIENE ALARCON MENDES GRANERO**

# FUNÇÃO LOGARÍTMICA E EXPONENCIAL:

## Aplicação à matemática financeira

**SÃO JOÃO DEL-REI**

**2016**

CHAIENE ALARCON MENDES GRANERO

# FUNÇÃO LOGARÍTMICA E EXPONENCIAL:
Aplicação à matemática financeira

Trabalho de monografia apresentado à banca examinadora da Universidade Federal de São João del-Rei como requisito para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Mestra Lorena Mara Costa Oliveira

SÃO JOÃO DEL-REI
2016

**CHAIENE ALARCON MENDES GRANERO**

**FUNÇÃO LOGARÍTMICA E EXPONENCIAL:**
Aplicação à matemática financeira

Trabalho de monografia apresentado à banca examinadora da Universidade Federal de São João del-Rei como requisito para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

São João del-Rei, 26 de Novembro de 2016.

Orientadora:_____________________________________________________

Nome: Mestra Lorena Mara Costa Oliveira

Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei

Examinador:_____________________________________________________

Nome: Doutor Jorge Andrés Julca Ávila

Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei

Dedico este estudo aos meus pais, que me apoiaram ao longo desse processo de formação.

# AGRADECIMENTOS

Foram muitos, os que me ajudaram a concluir esse trabalho.

Meus sinceros agradecimentos...

- a Deus, pois, sem sua ajuda, nada teria sido possível;

- à minha família, pela confiança e pelo apoio;

- aos amigos, pelas conversas e pela amizade;

- a todos que de alguma forma colaboraram comigo;

- aos professores pelas valiosas sugestões; e

- à Mestra Lorena Mara Costa Oliveira, por aceitar a orientação deste estudo e conduzir seu desenvolvimento com muita sabedoria e paciência.

Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende.

Leonardo da Vinci

## RESUMO

Essa monografia aborda, inicialmente, o advento de uma significativa ferramenta matemática: os logaritmos, que no decorrer de aproximadamente trezentos e cinquenta anos colaborou para a simplificação de cálculos aritméticos como multiplicação, divisão, potenciação com expoente fracionário, extração de raízes, entre outros. A função logarítmica, assim como sua inversa, a função exponencial, são instrumentos para relatar matematicamente a evolução de grandezas, nas quais o crescimento ou decrescimento são proporcionais à quantidade dessa grandeza em um determinado tempo. Com essas propriedades tais funções apresentam inúmeras aplicações que modelam fenômenos cotidianos em diversas áreas como física, química, música, biologia e geografia. O estudo destaca a aplicação das funções logarítmicas e exponenciais em matemática financeira através de explanação teórica e exemplos práticos.



**Palavras-chave:** logaritmo, função exponencial, função logarítmica, aplicação, matemática financeira.

## ABSTRACT

This study addresses, initially, the advent of a mathematical tool: the logarithms, that throughout three hundred and fifty years assisted on the simplification of arithmetical calculations such as: multiplication, division, potentiation with fractional exponent, root extraction, among others. The logarithmic function as well as its inverse, the exponential function, are instruments to mathematically express the evolution of quantities, in which the increase or decrease are proportional to the amount of such quantity in a given time. With these properties such functions show numerous applications that shape everyday phenomena in several areas such as physics, chemistry, music, biology and geography. This study also highlights the application of the logarithmic and exponential functions in financial mathematics through theoretical explanation as well as practical examples.



**Keywords:** logarithm, exponential, logarithmic function, application, financial mathematics.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\forall$ ........................................................................................................ Para todo

$\mathbb{R}$............................................................................... Conjunto dos números reais

$\mathbb{R}^{+}$........................................................... Conjunto dos números reais não negativos

$\pi$ ........................................................................................................................ Pi

$\subset$ ............................................................................................................ Está contido

**SUMÁRIO**

# INTRODUÇÃO

É indiscutível que os logaritmos e funções exponenciais foram abordados como assuntos muito inovadores por muito tempo, permitindo cálculos que na época em que surgiram eram muito onerosos ou até impossíveis de serem feitos.

Considero que o estudo dos logaritmos e funções exponenciais não deve ser considerado um fim, existem muitas aplicações desses tópicos na vida cotidiana, e muitos fenômenos podem ser representados por modelos matemáticos contendo logaritmos, citaremos alguns ao longo do texto, contudo a ênfase será em sua aplicação à matemática financeira.

O trabalho tratará inicialmente de um estudo histórico sobre os logaritmos e funções exponenciais em seu primeiro capitulo, abordando as motivações de sua criação através da analise dos dois matemáticos que se destacaram na busca da resolução de problemas na época.

No segundo capitulo discorro da explicação didática dos conceitos de funções exponenciais e logarítmicas, expondo suas fórmulas e propriedades com demonstrações. Depois exponho alguns exemplos de aplicação desses tópicos teóricos em química, geografia e finanças.

O terceiro capitulo refere-se a matemática financeira, iniciando com uma explanação histórica sobre o assunto, sua relação com as funções logarítmicas e exponenciais e encerrando com exemplos práticos da aplicação dessas funções à matemática financeira.

A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica de livros, artigos e tópicos da internet, objetivando expor a interação entre teoria e prática.

# 1 LOGARITMOS: RECAPTULAÇÃO HISTÓRICA

## 1.1 RECAPTULAÇÃO HISTÓRICA

Os logaritmos surgiram no século XVI de necessidades na astronomia e navegação por cálculos aritméticos muito complexos comparados ao que existia na época, nesse período das grandes navegações cálculos de rotas eram muito importantes. Nesse mesmo estágio também houve grande desenvolvimento comercial, então eram feitos cálculos de juros e transações comerciais, que também eram passíveis de simplificação utilizando logaritmos, pois esses transformam multiplicações e divisões em soma e subtração.

Hoje podemos observar logaritmos sendo utilizados em diversas áreas do conhecimento matemático como: economia, geofísica, física e etc.

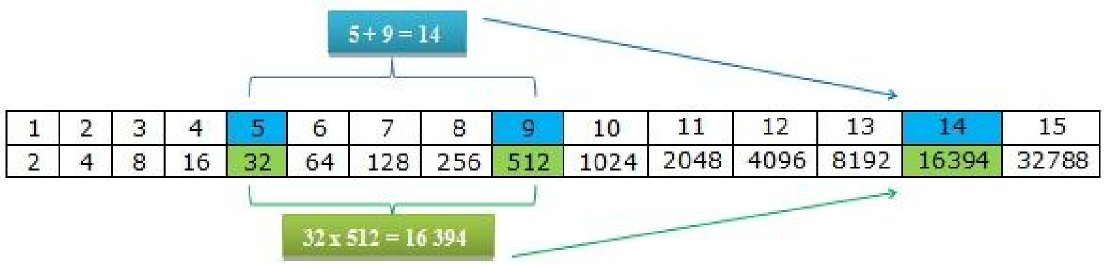
Muitos matemáticos participaram e contribuíram na construção dos logaritmos como conhecemos hoje. Podemos destacar John Napier (1550-1617) que é considerado o inventor dos logaritmos. Napier não era matemático, nascido na Escócia, era um nobre teólogo e a matemática era seu lazer, seu interesse estava na simplificação de cálculos, aspectos da computação e trigonometria. Joost Biirg (1552-1632) também contribuiu com trabalhos a respeito de logaritmos.

Em 1614 Napier apresenta a tabua de logaritmos no livro *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição do maravilhoso método dos logaritmos) e mostra como usa-la para que fosse proveitoso às pessoas, mas ele não justifica como chegou a essa ideia. Em 1619, dois anos após a sua morte foi publicado o método pelo qual era construída a tabela dos logaritmos, saindo do domínio da aritmética, que é mais estática, e entrando no domínio das grandezas, que são mais dinâmicas. Segundo Collete (1995), o primeiro homem a utilizar a ideia de logaritmos foi John Napier:

> (...) no final do século XVI, Napier, preocupado porque os cálculos eram grandes e difíceis, e freavam o progresso científico, concentrou todos os seus esforços em desenvolver métodos que pudessem simplificá-los. Com este fim, escreveu em sua Radiologia, onde descreve a utilização de barras e quadrinhos para efetuar somas de parcelas parciais. Os quadrinhos de Napier eram tábuas de multiplicações montadas sobre barras de secções quadradas (COLLETTE, 1995, p.45).

Podemos entender melhor o método que Napier utilizou para desenvolver a tabela de logaritmos nos orientando pelo quadro. Na primeira linha temos os expoentes e na segunda linha temos as potências de 2 correspondentes a esses expoentes. E com essa tabela podemos resolver multiplicações mais complicadas usando a adição.

FIGURA 1 – Tabela de Napier.




Fonte: Site Info Escola[1]

A tabela de Napier foi similar a essa, mas como nessa tabela a razão é 2 existem grandes lacunas entre os números da sequencia, ele precisaria que a sequência de números da segunda linha fosse formada por números cuja razão se aproximasse de 1, ou seja, ele estava buscando reduzir as lacunas entre os números da segunda linha, o que lhe daria maiores chances de encontrar o produto procurado, independente de qual fosse. Esse problema foi solucionado quando Napier usou a razão $1 - \frac{1}{10^7}$ com resultado aproximado a 0,9999999 e para resolver o problema dessas casas decimais que se repetem, ele multiplicou as potências por $10^7$. A tabela proposta por ele, como reflexo dessas conclusões, foi formada, na primeira linha, pelos expoentes L e na segunda por números N, ficando na seguinte forma: $N = 10^7(1 - \frac{1}{10^7})^L$.[2]

Napier chamou o expoente L de logaritmo de N, vejamos o que significa a palavra logaritmo. Conforme cita Magalhães (2003, p.8), logaritmos vêm da junção de duas palavras no latim *logos* – razão e *arithemos* - números (Quantas vezes se

---

[1] Disponível em: http://www.infoescola.com/matematica/historia-dos-logaritmos/. Acesso em out.2015.
[2] Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm. Acesso em out.2015.

tomam à base como fator para obter o número). Essa era ideia principal que se tinha a respeito da palavra logaritmo. O Método dos Logaritmos significava para Napier o desejo de expressar a criação de um método de cálculo a partir de razões numéricas ou da proporção de números. Perceba que fazendo L = 0 obteremos N = $10^7$, o que quer dizer que, para Napier, o logaritmo de $10^7$ = 1. [3]

É importante lembrar que Napier principiou a sua obra com explicações que utilizavam termos geométricos. Ele não pensou uma base para o seu sistema, basicamente escrevendo multiplicações repetidas que equivaliam a 0,9999999.

Sobre as funções exponenciais podemos citar uma lenda sobre seu surgimento:

> Conta a lenda que um rei solicitou aos seus súditos que lhe inventassem um novo jogo, a fim de diminuir o seu tédio. O melhor jogo teria direito a realizar qualquer desejo. Um dos seus súditos inventou, então, o jogo de xadrez. O Rei ficou maravilhado com o jogo e viu-se obrigado a cumprir a sua promessa. Chamou, então, o inventor do jogo e disse que ele poderia pedir o que desejasse. O astuto inventor pediu então que as 64 casas do tabuleiro do jogo de xadrez fossem preenchidas com moedas de ouro, seguindo a seguinte condição: na primeira casa seria colocada uma moeda e em cada casa seguinte seria colocado o dobro de moedas que havia na casa anterior. O Rei considerou o pedido fácil de ser atendido e ordenou que providenciassem o pagamento. Tal foi sua surpresa quando os tesoureiros do reino lhe apresentaram a suposta conta, pois apenas na última casa o total de moedas era de 263, o que corresponde a aproximadamente 9 223 300 000 000 000 000 = 9,2233.1018. Não se pode esquecer ainda que o valor entregue ao inventor seria a soma de todas as moedas contidas em todas as casas. O rei estava falido![4]

A lenda nos apresenta uma aplicação de funções exponenciais. O problema citado é um dos mais populares quando tratamos de matemática recreativa. Resolvendo o problema do número de moedas chegaremos a expressão dos sessenta e quatro primeiros termos da progressão geométrica: {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64}. Para chegarmos ao resultado dessa soma usamos a formula $S$ = $2^{64} - 1$, e obteremos o resultado 18.446.744.073.709.551.616 – 1, e então subtraindo o 1: 18.446.744.073.709.551.615 que seria o total de moedas ganho pelo inventor do jogo, levando o rei a falência.

[3] Disponível em: http://www.infoescola.com/matematica/historia-dos-logaritmos/. Acesso em out.2015.
[4] Disponível em: http://www.suporteeducacional.com.br/matematica/conteudo/17/matematicaelementariii_pg030.pdf. Acesso em out.2015.

# 2 CONTEXTUALIZAÇÃO: FUNÇÕES LOGARITMICAS

Funções logarítmicas e exponenciais são utilizadas em inúmeras áreas da matemática. Apesar de serem assuntos considerados muito complicados pelos alunos do ensino básico, são muito uteis em diversas situações, desde medições de níveis de terremotos, como os que ocorreram no Japão no ano de 2011, medição de nível sonoro nas ruas das cidades, apreciações de imóveis ou depreciações de automóveis e variações de aplicações financeiras.

Depois de feita a recapitulação histórica, iniciaremos uma contextualização sobre as funções logarítmicas, iniciando por funções, funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras, passando por logaritmos e depois trataremos das funções exponenciais.

## 2.1 FUNÇÕES: DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

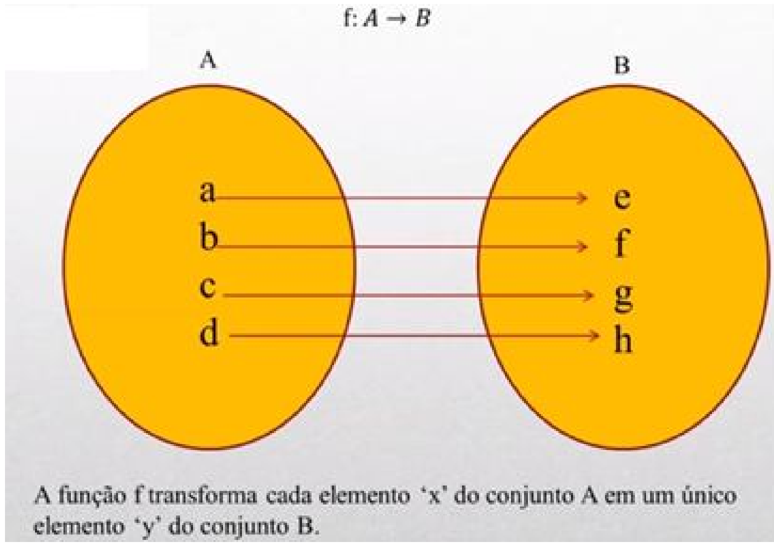
Podemos definir uma função da seguinte maneira:

Sejam $A$ e $B$ conjuntos não vazios. Denomina-se “$f$” uma função de $A$ em $B$, representada por $f: A \to B$ uma lei, que indica como associar cada elemento “$x$” de $A$ um único elemento “$y$” em $B$.

Citando um exemplo de função podemos observar o conjunto $A$ e o conjunto $B$, representados em diagramas de Van Euler, os elementos do conjunto $A$, que é o conjunto de partida, ou domínio, o campo de existência da função, serão “transformados” nos elementos do conjunto $B$, que é o conjunto de chegada, o conjunto que contem as possíveis transformações de “$x$” pela função $f$. O conjunto Imagem será o conjunto das transformações e contem apenas os valores associados ao $x$ transformados pela função $f$.

Um exemplo de função é representado pela figura 2:

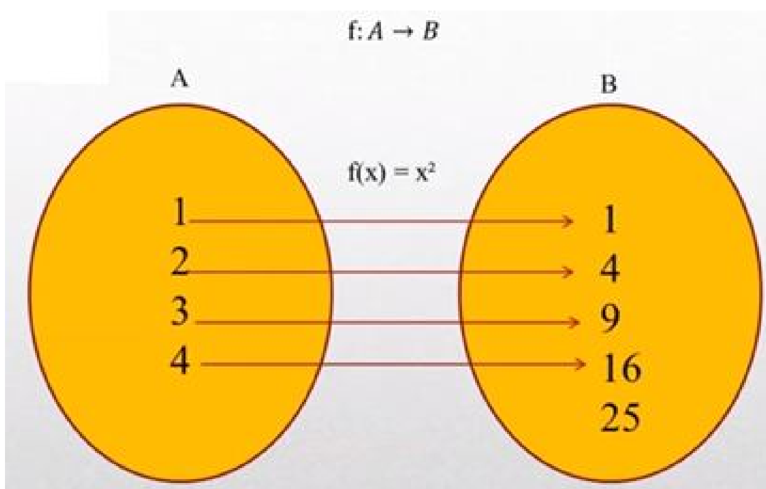
FIGURA 2 – $f : A \rightarrow B$ : exemplo com letras.




Fonte: Elaborada pela autora

Podemos também citar um exemplo numérico na figura 3:

FIGURA 3 – $f : A \rightarrow B$ : exemplo com números.




Fonte: Elaborada pela autora

Sobre a função representada na figura 3 pode-se definir:

$f(1) = 1^2 = 1$

$f(2) = 2^2 = 4$

$f(3) = 3^2 = 9$

$f(4) = 4^2 = 16$

Domínio: $D\ (f) = \{1, 2, 3, 4\} = A$

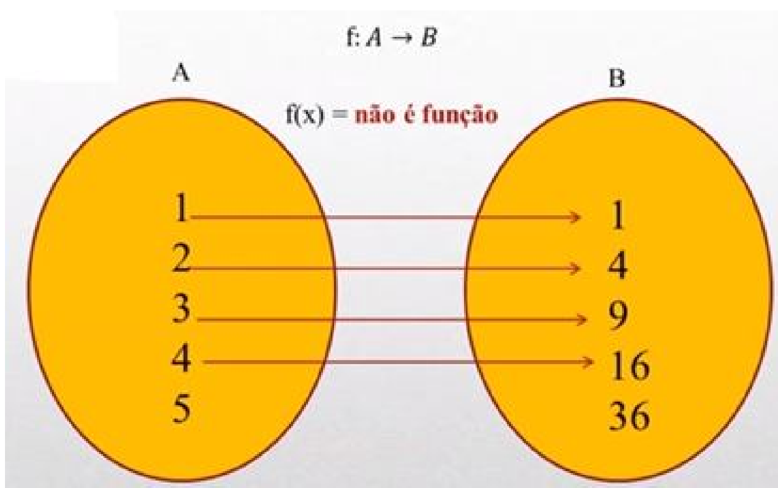
Contradomínio: $CD\ (f) = \{1, 4, 9, 16, 25\} = B$

Imagem: $Im\ (f) = \{1, 4, 9, 16\}$

O elemento 25 no conjunto $B$ não tem nenhum correspondente no conjunto $A$, mas isso não descaracteriza a função.

Na figura abaixo não temos uma função, pois não temos o elemento correspondente ao $F(5)$ no conjunto $B$.

FIGURA 4 – Exemplo de conjuntos que não são funções.



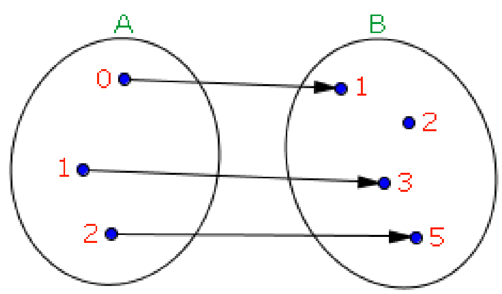

Fonte: Elaborada pela autora

Para o estudo das funções logarítmicas e exponenciais é importante que saibamos os conceitos de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras:

Uma função $f: A \to B$ é injetora quando elementos diferentes de $A$ são transformados por $f$ em elementos diferentes de $B$, ou seja, $x_1 \neq x_2$ em $A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ em $B$.

Na figura 5 fornecemos um exemplo de função injetora, onde os elementos do conjunto $A = \{0, 1, 2\}$ são transformados pela função nos elementos do conjunto $B = \{1, 2, 3, 5\}$, e cada elemento de $A$ é transformado em um elemento diferente no conjunto $B$.

FIGURA 5 – Exemplo de função injetora.



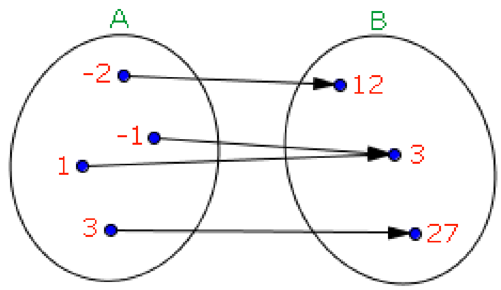

Fonte: Site Matemática didática[5]

Uma função $f: A \to B$ é sobrejetora quando todo elemento $y$ em $B$ é imagem de um $x$ em $A$, ou seja, $Im(f) = B$.

Na figura 6 fornecemos um exemplo de função sobrejetora, onde todos os elementos do conjunto $B = \{3, 12, 27\}$ têm pelo menos um correspondente no conjunto $A = \{-2, -1, 1, 3\}$.

[5] Disponível em: http://www.matematicadidatica.com.br/FuncaoSobrejetoraInjetoraBijetora.aspx. Acesso em out.2015.

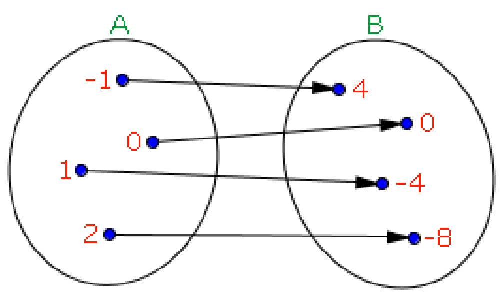
FIGURA 6 – Exemplo de função sobrejetora.




Fonte: Site Matemática didática[6]

Uma função é bijetora quando ela for simultaneamente injetora e sobrejetora. Na figura 7 podemos ver um exemplo de função bijetora, onde todos os elementos do conjunto $B$ tem apenas um elemento correspondente no conjunto $A$.

FIGURA 7 – Exemplo de função bijetora.




Fonte: Site Matemática didática[7]

## 2.2 LOGARITMOS

O logaritmo agora pode ser definido de forma clara e objetiva. Depois de entendermos a definição trataremos das propriedades que propiciam o uso do

[6] Disponível em: http://www.matematicadidatica.com.br/FuncaoSobrejetoraInjetoraBijetora.aspx. Acesso em out.2015.
[7] Disponível em: http://www.matematicadidatica.com.br/FuncaoSobrejetoraInjetoraBijetora.aspx. Acesso em out.2015.

logaritmo. O uso atual de logaritmos utiliza principalmente a base decimal e a base $e$, sendo este último denominado logaritmo natural. A definição de logaritmos pode ser escrita da seguinte maneira:

Dado um número real positivo $a \neq 1$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base $a$ é o expoente $y$ a que se deve elevar $a$ de tal modo que $a^y = x$. Escreve-se $y = \log_a x$.

Notamos então que $\log_a 1 = 0$ e também $\log_a a = 1$, levando em consideração que $a^0 = 1$ e $a^1 = a$ para todo $a > 0$. Esta afirmação será muito importante no estudo das propriedades dos logaritmos.

Seguindo dessa definição citamos a propriedade fundamental dos logaritmos:

### 2.2.1 PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DOS LOGARITMOS

O logaritmo do produto de dois números reais positivos $b$ e $c$ em uma base positiva $a \neq 1$ é igual à soma dos logaritmos de $b$ e $c$ nesta mesma base $a$. Em termos matemáticos:

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstrando, utilizando a definição:

$u = \log_a b$ e $v = \log_a c$

$b = a^u$ e $c = a^v \rightarrow b.c = a^u.a^v = a^{u+v} \rightarrow$

$u + v = \log_a(b.c) \rightarrow \log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$

**Teorema.** Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^+$ tem-se que $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

**Demonstração:** $\log_a(bc) = \log_a\left(a^{\log_a(b)+\log_a(c)}\right) = \log_a b + \log_a c$.

Agora demonstraremos a seguinte afirmação: o logaritmo de um produto com mais de dois fatores resulta na soma dos logaritmos de cada fator separadamente.

$$\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + \ldots + \log_a b_n$$

De fato:

$\log_a b_1 \cdot (b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot ... \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a (b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot ... \cdot b_n)$ e

$\log_a b_2 \cdot (b_3 \cdot b_4 \cdot ... \cdot b_n) = \log_a b_2 + \log_a (b_3 \cdot b_4 \cdot ... \cdot b_n)$

Com isso, podemos ver que:

$\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot ... \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + \ldots + \log_a b_n$

### 2.2.2 PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

Tendo como base a propriedade fundamental dos logaritmos podemos enunciar as propriedades dos logaritmos:

I – Logaritmo do inverso: $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

II – Logaritmo do quociente: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

III – Logaritmo da potencia: $\log_a (b^t) = t \cdot \log_a b$ (citando em particular $\log_a (a^t) = t, \forall t \in \mathbb{R}$)

IV – Logaritmo como expoente de sua base: $a^{\log_a x} = x$

Mudança de base: Dado $\log_a x$ é possível encontrar o valor de $\log_b x$ se conhecermos o valor de $\log_a b$, utilizando a expressão para mudança de base:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Podemos demonstrar essa expressão, considerando:

$\log_a x = A$

$\log_a b = B$

$\log_b x = C$, sendo $a, b \neq 1$.

Como $b \neq 1$, então $B \neq 0$. Logo, $x = a^A$, $b = a^B$ e $x = b^C$, e como $((a^B)^C) = b^C = x = a^A$ temos:

$$B \cdot C = A \Leftrightarrow \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Então, podemos escrever a expressão de mudança de base da seguinte forma:

$$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$$

**Teorema:** Seja $x$ um número real positivo e $a$, $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, é válida a seguinte propriedade: $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$.

**Demonstração:** Escrevendo $x = a^{log_a(x)}$, então, $\log_b(x) = \log_b\left(a^{\log_a(x)}\right) = \log_a(x) \cdot \log_b(a)$.

### 2.2.3 FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Uma função que é composta de funções inversas entre si é a função identidade. Podemos dizer que uma função possui inversa quando cada elemento do seu contradomínio é imagem de um único elemento do seu domínio.

Uma função real $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}^+$, será uma função logarítmica se tiver as seguintes propriedades:

I) $L$ é um função crescente: $x < y \Rightarrow L(x) < L(y)$;

II) $L(xy) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, ao numero $L(x)$ chamamos logaritmo de $x$.

Como consequências de I e II teremos as propriedades:

A) Uma função logarítmica $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é sempre injetiva, ou seja, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes.
B) O logaritmo de 1 é zero: $L(1) = L(1.1) = L(1) + L(1)$, logo L(1) = 0.

C) Os números maiores que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores que 1 tem logaritmos negativos.

D) Para todo $x$ > 0, tem-se $L\frac{1}{x} = -L(x)$

E) Para todo $x \epsilon \mathbb{R}^{+}$ e todo número racional $r = \frac{p}{q}$ tem-se $Lx^{r} = r.L(x)$

F) Uma função logarítmica $L: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ é ilimitada, superior e inferiormente.

Sobre as funções logarítmicas é importante afirmar que toda função logarítmica $L$ é sobrejetiva, ou seja, dado qualquer número real $c$, existe sempre um único número real positivo $x$ tal que $L(x) = c$. E toda função logarítmica $L: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre $\mathbb{R}^{+}$e $\mathbb{R}$.

Dados dois valores reais $x_1 < x_2$, teremos que $a^{x_1} < a^{x_2}$ quando $a > 1$ e $a^{x_1} > a^{x_2}$ quando $0 < a < 1$. Então essas serão as condições para que a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+} / g(x) = a^{x}$ possua inversa.

Sejam $f: A \to B$ e $g: E \to F$ funções tais que $Im(f) \subset E$. A função que associa a cada $x \in A$, $g(f(x)) \in F$, é chamada função composta de $g$ com $f$ e é denotada por $g \circ f$. A função $g \circ f$ : A→ F é definida por $g \circ f\ (x) = g\big(f(x)\big)$.

Percebemos, de acordo com a definição que a função $f: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R} / f(x) = \log_a x$ é inversa da função exponencial $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+} / g(x) = a^{x}, a \neq 1$ sendo um numero real positivo.

Podemos verificar que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, utilizando as propriedades:

$f(g(x)) = \log_a a^{x} = x$ (propriedade 3)

$g(f(x)) = a^{\log_a x} = x$ (propriedade 4)

É comum que se utilize os logaritmos de base 10 e de base $e$, base dos logaritmos naturais.

## 2.3 CONTEXTUALIZAÇÃO EM FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Antes de tratarmos das funções exponenciais propriamente ditas temos que mencionar algumas definições que nos serão uteis.

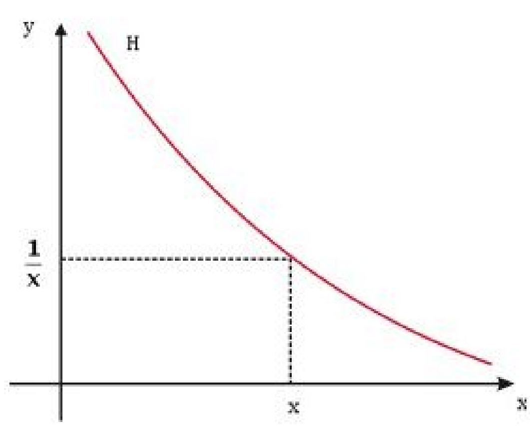
### 2.3.1 LOGARITMOS NATURAIS

Seja $H$ o ramo positivo do gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, que é a função que associa a cada número real positivo $x$ o número $y = \frac{1}{x}$. Geometricamente $H$ é o ramo da hipérbole $xy = 1$, que está contido no primeiro quadrante, então podemos dizer que um ponto $(x, y)$ pertence ao conjunto $H$ se, e somente se, $x > 0$ e $xy = 1$. $H$ é o subconjunto do plano constituído pelos pontos de forma $\left(x, \frac{1}{x}\right)$, onde $x > 0$ e pode ser escrito por:

$$H = \left\{(x, y): x > 0, y = \frac{1}{x}\right\}$$

Geometricamente, representados na Figura 8, $H$ é o conjunto de pontos reais $(x, y)$, com $x > y$ e $x \cdot y = 1$.

FIGURA 8 – $H$ representa o conjunto de pontos $y = \frac{1}{x}$



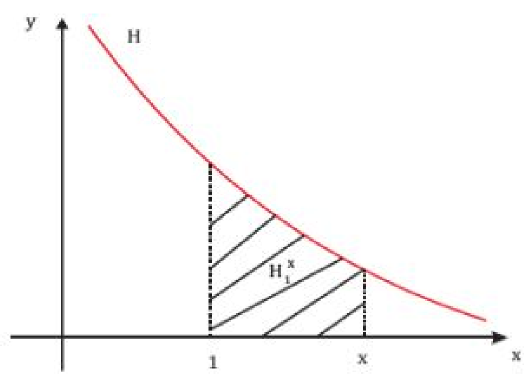

Fonte: Elaborada pela autora

Uma faixa da hipérbole é obtida quando fixamos dois números reais positivos $a$ e $b$, com $a < b$, e tomamos a região do plano limitada pelas duas retas verticais $x = a$ e $x = b$, pelo eixo das abscissas, e pela hipérbole $H$, essa região pode ser indicada pelo símbolo $H_b^a$. O logaritmo natural de um número real positivo $x$ natural pode ser definido como sendo a área da faixa $H_1^x$, $\ln x$ não pode ser definido se $x < 0$. Escrevendo em termos matemáticos:

$$\ln x = \text{Á}rea(H_1^x)$$

Para $x > 1$ teremos $\text{Á}rea(H_1^x) = \int_1^x \frac{1}{x}\, dx$, ou seja, $\ln x = \log_e x = \int_1^x \frac{1}{x}$, de acordo com a figura 9:

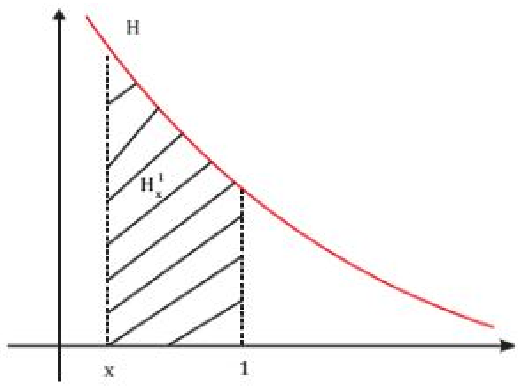
FIGURA 9 – $\ln x = \text{Á}rea(H_1^x)$




Fonte: Elaborada pela autora

Para $0 < x < 1$ teremos $\text{Á}rea(H_1^x) = \int_1^x \frac{1}{x}\, dx = -\log_e(x) = -\ln x$, de acordo com a figura 10:

FIGURA 10 – $\acute{A}rea(H_1^x) = \int_1^x \frac{1}{x}\, dx = -\log_e(x) = -\ln x$




Fonte: Elaborada pela autora

Quando x=1, $H_1^1$ representa um segmento de reta, então sua área é igual a zero. Pode-se escrever:

$$\ln 1 = 0$$

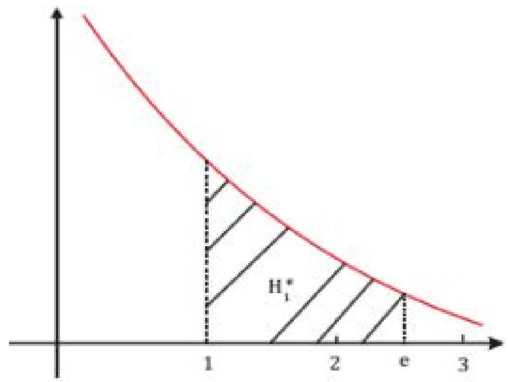
$$\ln(x) > 0 \text{ se } x > 1;$$

$$\ln(x) < 0 \text{ se } 0 < x < 1.$$

O número $e$ que é a base dos logaritmos naturais é caracterizado pelo seu logaritmo natural ser igual a 1, então, a área $(H_1^e) = 1$ escreve-se:

$$\acute{A}rea(H_1^e) = \int_1^e \frac{1}{x}\, dx = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

FIGURA 11 – Área do logaritmo natural.




Fonte: Elaborada pela autora

### 2.3.2 O NÚMERO $e$

Podemos definir o número $e$ como o único numero real positivo cujo logaritmo natural é igual a 1, essa é a base do sistema de logaritmos naturais. Em símbolos matemáticos podemos escrever:

$$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Imediatamente notamos que $e > 1$, visto que temos logaritmos negativos para os números reais positivos menores que 1.

Para as aplicações financeiras, geralmente usamos logaritmos naturais, que são logaritmos na base $e$, um número constante que é de aproximadamente 2,718. Este número, como $\pi$, se repete muitas vezes no trabalho dos matemáticos.

## 2.4 FUNÇÕES EXPONENCIAIS

A função exponencial com base a é definida por $f(x) = a^x$, em que $a > 0$, $a \neq 1$ e $x$ é qualquer número real.

Seja $a > 0$ e $a \neq 1$, temos duas possibilidades: $a > 1$ e $a < 1$.

Nos casos em que $a > 1$ a função $a^x$ é sempre crescente, então se $x_1 < x_2$ teremos sempre $a^{x_1} < a^{x_2}$. Demonstração:

Sendo a desigualdade: $1 < a, (a > 0)$, multiplicando os membros por $a$ obtemos:

$$a < a^2$$

Repetindo a operação sucessivamente teremos o resultado:

$$a^2 < a^3 < \cdots < a^n < a^{n+1}$$

Do mesmo modo para os valores negativos do expoente: multiplicando por $\frac{1}{a}$ os membros da desigualdade $1 < a$, temos:

$\frac{1}{a} < 1$ , multiplicando novamente:

$\frac{1}{a^2} < \frac{1}{a} < 1$ e

$\frac{1}{a^3} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a} < 1 = a^{-3} < a^{-2} < a^{-1} < a^0 \ldots$

Resumindo, podemos escrever:

$$a^{-(n+1)} < a^{-n} < \cdots < a^{-2} < a^{-1} < a^0 < a < a^2 < \cdots < a^n < a^{n+1}$$

Se $a < 1$, a função $a^x$ é sempre decrescente, ou seja, para $x_1 < x_2$ teremos $a^{x_1} > a^{x_2}$. Demonstração:

Se $a < 1$, então teremos: $1 < \frac{1}{a}$ e então podemos escrever:

$$(\tfrac{1}{a})^{-(n+1)} < (\tfrac{1}{a})^{-n} < \cdots < \left(\frac{1}{a}\right)^{-2} < \left(\frac{1}{a}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{0} < \frac{1}{a} < \cdots < \left(\frac{1}{a}\right)^{n} < (\tfrac{1}{a})^{n+1}$$

Como $(\frac{1}{a})^{-p} = a^p$ pode-se usar a mesma demonstração anterior:

$$a^{-(n+1)} < a^{-n} < \cdots < a^{-2} < a^{-1} < a^0 < a < a^2 < \cdots < a^n < a^{n+1}$$

Funções exponenciais e logarítmicas são inversas entre si. Em termos simples, isto significa que uma expressão em forma exponencial pode ser convertida em um logaritmo alternando as entradas e saídas. Vamos começar com um exemplo concreto. A função exponencial:

$$y = 10^x$$

Considerando que a variavel $x$ é a entrada e a saída é a variável $y$. Para uma entrada de $x = 2$ obtemos uma saída de $y = 100$.

$$100 = 10^2$$

Em um logaritmo de base 10, chamado de logaritmo comum, esses papéis são invertidos. O logaritmo comum deve ter a entrada $y = 100$ e saída $x = 2$:

$$2 = \log_{10}(100)$$

Para logaritmos comuns, aqueles com base 10, a base sobre o logaritmo é muitas vezes deixado de fora e escrito como:

$$2 = \log(100)$$

Vamos comparar lado estas formas a lado:

$$100 = 10^2$$

Saída Entrada

$$2 = \log_{10}(100)$$

Saída Entrada

Os números são os mesmos, mas papel que desempenham é inverso.

## 2.5 PRINCIPAIS RESULTADOS

Podemos citar agora alguns exemplos de aplicação das funções logarítmicas e exponenciais:

### 2.5.1 GEOGRAFIA

Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

População do ano-base = $P_0$

População após um ano = $P_0 \cdot (1{,}03) = P_1$

População após dois anos = $P_0 \cdot (1{,}03)^2 = P_2$

População após x anos = $P_0 \cdot (1{,}03)^x = Px$

Vamos supor que a população dobrará em relação ao ano-base após x anos, sendo assim, temos:

$Px = 2 \cdot P_0$

$P_0 \cdot (1{,}03)^x = 2 \cdot P_0$

$1{,}03^x = 2$

Aplicando logaritmo:

$log\, 1{,}03^x = \log 2$

$x \log 1{,}03 = \log 2$

$x\, 0{,}0128 = 0{,}3010$

$x = \frac{0{,}3010}{0{,}0128}$

$x = 23{,}5$

A população dobrará em aproximadamente 23,5 anos.

### 2.5.2 QUÍMICA

Determine o tempo que leva para que 1000 g de certa substância radioativa, que se desintegra a taxa de 2% ao ano, se reduza a 200 g. Utilize a seguinte expressão: $Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$, em que $Q$ é a massa da substância, $r$ é a taxa e $t$ é o tempo em anos.

Utilizando a fórmula: $Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$

$200 = 1000 \cdot e^{-0{,}02t}$

$\frac{200}{1000} = e^{-0,02t}$

$\frac{1}{5} = e^{-0,02t}$ (aplicando definição)

$-0,02t = \log_e \frac{1}{5}$

$-0,02t = \log_e 5^{-1}$

$-0,02t = -\log_e 5$

$-0,02t = -\ln 5 \ \text{x}(-1)$

$0,02t = \ln 5$

$t = \frac{\ln 5}{0,02}$

$t = \frac{1,6094}{0,02}$

$t = 80,47$

Concluindo que a substância levará 80,47 anos para se reduzir a 200 g.

### 2.5.3 MATEMÁTICA FINANCEIRA

Uma pessoa aplicou a importância de R$ 500,00 numa instituição bancária que paga juros mensais de 3,5%, no regime de juros compostos. Quanto tempo após a aplicação o montante será de R$ 3 500,00?

Nos casos envolvendo a determinação do tempo e juros compostos, a utilização das técnicas de logaritmos é imprescindível.

Fórmula para o cálculo dos juros compostos: $M = C \cdot (1 + i)^t$. De acordo com a situação problema, temos:

M (montante) = 3500

C (capital) = 500

i (taxa) = 3,5% = 0,035

t = ?

Utilizando a fórmula: $M = C \cdot (1 + i)^t$.

$3500 = 500 \cdot (1 + 0{,}035)^t$

$\frac{3500}{500} = 1{,}035^t$

$1{,}035^t = 7$

Aplicando logaritmo:

$\log 1{,}035^t = \log 7$

$t \log 1{,}035 = \log 7$

$t\, 0{,}0149 = 0{,}8451$

$t = \frac{0{,}8451}{0{,}0149}$

$t = 56{,}7$

O montante de R$ 3 500,00 será originado após 56 meses de aplicação.

Nesse trabalho darei ênfase à aplicação da função exponencial e logarítmica à matemática financeira, nesse caso pode-se calcular o tempo que um capital deve ser aplicado a juros compostos para que ele gere determinado montante como no exemplo citado.

# 3 MATEMÁTICA FINANCEIRA

## 3.1 ELEMENTOS HISTORICOS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

A matemática financeira é um instrumento de estudo das formas de evolução do dinheiro através do tempo nas aplicações financeiras, em empréstimos ou em descontos, com ela temos instrumentos para analisar alternativas de aplicações de dinheiro ou pagamento de empréstimos. Historicamente, a matemática financeira esta ligada ao desenvolvimento do comércio, quando perceberam que o capital tem estreita relação com o tempo.

Inicialmente os homens viviam em pequenos grupos e retiravam da natureza o que precisavam para viver, e as trocas de produtos praticamente não existiam, elas surgiram quando esses grupos começaram a se comunicar, então eles trocavam os excedentes de produtos que tinham em seu estado natural, mas não havia valor definido para os produtos trocados, assim surgiu a primeira forma de comércio: a troca direta de mercadorias ou escambo.

> Houve, portanto a necessidade de um sistema relativamente estável de avaliações de equivalências, fundado num principio (vizinho daquele da base de um sistema de numeração) dando a definição de algumas unidades ou padrões fixos. Nesse sistema é sempre possível estimar tal ou qual valor, não somente para as operações de caráter econômico, mas também (e talvez, sobretudo) para a regulamentação de problemas jurídicos importantes como o preço da noiva, o preço do roubo ou o preço do sangue (estimação de bens de consumo de uma “mulher a tomar”, do delito do roubo ou do delito de golpes e ferimentos que tenham engendrado a morte de um individuo). (Ifrah, 1997, p. 145)

Conforme as comunidades foram crescendo e se desenvolvendo, essas trocas também ganharam volume e surgiram os problemas, pois não havia um valor ou medida para os produtos que seriam permutados, daí despontou a necessidade de se criar um sistema para avaliação de valores e equivalência entre eles. Foram criadas unidades chamadas moeda-mercadoria, a primeira unidade foi o boi, mas haviam outras, como colares de pérola, conchas, algodão, cacau, cerâmica e o sal, e vem dele a palavra salário que usamos atualmente, os produtos usados com padrão de valor eram produtos de uso cotidiano e de utilidade conhecida, cada região usava um produto de acordo com suas tradições.

> Mas nos tempos antigos a operação de escambo, longe de ser um ato simples, devia ser, ao contrário, envolta de formalidades complexas, muito provavelmente ligadas à mística e às praticas mágicas. É em todo caso o que revela a análise etnológica feita nas sociedades “primitivas” contemporâneas, que se viu confirmar por um certo número de descobertas arqueológicas. Pode-se, portanto, supor que nas culturas pastorais a idéia de boi-padrão (moeda de sangue) sucedeu a ideia de “boi de sacrifício”, ela mesma ligada ao valor intrínseco estimado do animal. (Ifrah, 1997, p. 146)

No Egito as trocas eram feitas por metais: cobre, bronze, ouro e prata, que tinham seu valor determinado pelo peso. A moeda no sentido que conhecemos hoje surgiu para uniformizar os mecanismos de trocas de valores quando esses metais começaram a serem fundidos em pequenas peças com tamanho e peso padrão e tinham o selo de uma autoridade publica para certificar sua originalidade.

A invenção desse sistema ideal de troca comercial, segundo a opinião da maioria dos especialistas, foi atribuída à Grécia da Ásia (ou Ásia Menor) e à Lídia, no século VII antes da era cristã. Em razão das múltiplas vantagens que comportava, seu uso teria se espalhado rapidamente por Grécia, Fenícia, Roma e entre inúmeros outros povos, inclusive na China. (Ifrah, 1997, p. 152).

A criação da moeda como unidade de valor facilitou muito as transações comerciais de produtos e serviços, passando a ser possível um sistema claro de preços, e as pessoas puderam passar a optar por consumir imediatamente ou poupar seus recursos para consumir no futuro, então a moeda funciona também como reserva de valor.

O comercio foi se desenvolvendo inicialmente nas regiões da Grécia, depois no Império Romano em geral e posteriormente na Idade Média nas cidades estado da Itália que já faziam transações com o Oriente. Do século XV em diante muitos países europeus também se desenvolveram nessa área como Holanda, Espanha, Portugal e Inglaterra, nesse período houve grande progresso das navegações com a descoberta do caminho para a Índia e para a América.

Com o progresso das navegações cada país tinha sua moeda própria e existiam muitas moedas em circulação e então surge uma nova atividade: a venda do dinheiro, pois muitas pessoas se interessaram em estocar o maior valor em ouro possível, e algumas moedas tinha maior quantidade de ouro comparada às outras.

Neste momento surge a questão que hoje chamamos de cambio: quanto valeria cada moeda em relação às moedas dos outros países? Esse quesito foi resolvido definindo o valor da moeda de acordo com a quantidade de ouro o país possuía, o chamado padrão ouro. Então surgem os cambistas, que acumulavam moedas e as emprestavam por determinado tempo a quem precisasse e a eles eram devolvidas a quantidade emprestada mais uma certa quantia combinada, o que hoje chamamos de juros.

> O juro era pago pelo usufruto do dinheiro recebido ou, mais -propriamente, era a "compensação pelo temor" de quem dava dinheiro emprestado e assim se expunha a um grande risco. Entretanto estes juros alcançaram, em alguns casos, quantias incríveis: na antiga Roma os usuários exigiam de 50 a 100 por cento e na Idade.Média, de 100 a 200 por cento, às vezes mais, em relação direta com a necessidade do solicitante ou do montante da soma. (Gonçalves, 2007, p. 6)

A palavra banco no sentido que conhecemos hoje surgiu, pois esses cambistas trabalhavam em espaço público sentados em um banco e começaram a serem chamados de banqueiros. Os primeiros bancos propriamente ditos foram fundados por sacerdotes e posteriormente a igreja católica fundou o Banco do Espirito Santo onde eram feitos empréstimos com juros, e, na ambição de monopolizar essa atividade outras pessoas eram condenadas pela igreja se quisessem e ousassem exerce-la. Mesmo com a desaprovação da igreja outros bancos sugiram, pela própria necessidade do comercio, principalmente na Itália e posteriormente na Europa ocidental.

A primeira forma de uso de papel moeda foi o cheque, que surgiu entre os séculos XVI e XVII. Veremos na descrição de Gonçalves (2007, p. 6) a relação entre a matemática financeira e o desenvolvimento dos bancos:

> O surgimento dos bancos está diretamente ligado ao cálculo de juros compostos e o uso da atemática Comercial e Financeira, de modo geral. Na época em que o comércio começava a chegar ao auge, uma das atividades do mercador foi também a do comércio de dinheiro: com o ouro e a prata. Nos diversos países eram cunhadas moedas de ouro e prata. (p. 4). Assim os bancos foram um dos grandes propulsores práticos para o avanço da Matemática Comercial e Financeira e da Economia durante os séculos X até XV. Pois sem essa motivação para o aprimoramento dos cálculos, talvez, essa área de Matemática não estivesse tão avançada nos dias atuais. (Gonçalves, 2007, p. 6)

Nós podemos observar que conforme aconteceu a evolução dos sistemas comerciais e mercantis cresceu a necessidade de cálculos exatos de valores de transações. Dessa necessidade foram escritos os primeiros textos sobre aritmética na Europa antes do século XVII.

> A mais antiga aritmética impressa é a anônima e hoje extremamente rara “Aritmética de Treviso”, publicada em 1478 na cidade de Treviso. Trata-se de uma aritmética amplamente comercial, dedicada a explicar a escrita dos números, a efetuar cálculos com eles e que contém aplicações envolvendo sociedades e escambo. Como os "algoritmos" iniciais do século XIV, ela também inclui questões recreativas. Foi o primeiro livro de matemática a ser impresso no mundo ocidental. (Gonçalves, 2007, p. 7)

A partir desse escrito surgiram muitos outros que foram publicados e influenciaram diretamente o desenvolvimento da matemática, percebemos assim que a aritmética pode ser considerada a vanguarda dos cálculos financeiros utilizados atualmente.

No presente observamos às crises financeiras que atingem vários países, a matemática, em especial a matemática financeira vem sendo citada como colaboradora no agravamento dessas crises, como matemáticos são conhecidos na indústria, têm sido responsabilizados por desenvolver e utilizar modelos que podem ter causado o aprofundamento da crise financeira. No entanto, como Lo e Mueller (2010) afirmam "Culpar modelos quantitativos para a crise parece particularmente perverso, e semelhante a culpar aritmética e o sistema de números pela fraude contábil." Ao longo da história, matemática e finanças têm tido sempre uma relação estreita. A partir dos babilônios, por meio de Thales, e depois Fibonacci, Pascal, Fermat, Bernoulli, Bachelier, Wiener, Kolmogorov, Ito, Markowitz, Black, Scholes, Merton e muitos outros fizeram grandes contribuições para o desenvolvimento da matemática ao tentar resolver problemas financeiros.

## 3.2 A RELAÇÃO ENTRE A MATEMÁTICA FINANCEIRA E A FUNÇÃO LOGARITMICA E EXPONENCIAL

A aplicabilidade da teoria dos logaritmos em outras áreas do conhecimento, visa agilizar cálculos, bem como ampliar conhecimentos em assuntos específicos. Na matemática financeira o logaritmo tem sua aplicação no calculo de juros compostos: por quanto tempo um capital deve ser aplicado a juros compostos para que gere um determinado montante.

Muitas das aplicações no mundo dos negócios baseiam-se numa taxa de crescimento ou de decaimento dada como uma porcentagem. Por exemplo, a taxa à qual o valor de uma casa R$ 150000,00 aumenta pode ser dada como 2% ao ano. O valor da casa $t$ anos depois seria:

$$V(t) = 150000(1{,}02)^t$$

Outras quantidades irão diminuir de acordo com uma porcentagem. Na conclusão de uma campanha de marketing, as vendas para um novo computador são R$ 550000,00. As vendas diminuiram 5% por semana a partir desse ponto em diante. As vendas $t$ semanas depois podem ser representadas da seguinte maneira:

$$V(t) = 550000(0{,}95)^t$$

Cada uma dessas quantidades é modelada por uma função exponencial na forma:

$$f(t) = a(1 \pm r)^t$$

Onde $a$ é o valor original da quantidade e $r$ é a taxa em porcentagem por período. O tempo deve corresponder às unidades de tempo sobre a variável $t$. O sinal de mais é usado quando a função é uma função exponencial crescente. O sinal negativo é utilizado quando a quantidade está diminuindo.

Existem outros exemplos do uso da matemática financeira com função logarítmica e exponencial. Economia e finanças estão diretamente relacionados com a inflação (aumento no preço). Aumento no preço se comporta exatamente como regido pela fórmula. O preço aumenta em determinado valor a cada período. Isto é para a economia. Da mesma forma para financiamentos sempre que investir em políticas de investimento convencionais, como depósitos fixos, fundos de previdência, investimentos em materiais valiosos seus aumentos de preços são como a taxa de inflação. Taxa de inflação é geralmente o valor que pode ser expresso da melhor maneira usando a função exponencial ou função logarítmica.

## 3.3 EXEMPLOS PRÁTICOS DE APLIÇÃO DE FUNÇÕES LOGARITMICAS E EXPONENCIAIS À MATEMATICA FINANCEIRA

### 3.3.1 COMPRA E VENDA DE VEÍCULOS

Roberto pretende vender um veiculo por R$ 40000,00, o comprador dispõe de R$ 5000,00 e este valor está aplicado em um investimento que rende 28% em juros compostos a cada dois anos. O carro de Roberto tem uma desvalorização de 19% a cada dois anos calculada sobre o valor do carro no período de dois anos imediatamente anterior. Calcularemos o tempo mínimo em que o comprador possuirá dinheiro bastante para comprar o veiculo. (Dados a serem utilizados: $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$)

Para iniciar esse calculo deveremos calcular o montante utilizando a valorização do dinheiro aplicado e a desvalorização do carro, e posteriormente verificar quando esses dois valores serão iguais.

$$5000.(1{,}28)^{\frac{t}{2}} = 40000.(0{,}81)^{\frac{t}{2}}$$

$$\left(\frac{1{,}28}{0{,}81}\right)^{\frac{t}{2}} = \frac{40000}{5000}$$

$$\left(\frac{1{,}28}{0{,}81}\right)^{\frac{t}{2}} = 8$$

Aplicando o logaritmo dos dois lados da igualdade:

$$\log\left(\frac{1{,}28}{0{,}81}\right)^{\frac{t}{2}} = \log 8$$

Os dados que temos disponíveis são $\log 2$ e $\log 3$, então teremos que desenvolver o raciocínio para chegarmos a esses valores:

$$\frac{1{,}28}{0{,}81} = \frac{128}{81} = \frac{2^7}{3^4} \text{ e } 8 = 2^3$$

Podemos então voltar à expressão:

$$\log\left(\frac{2^7}{3^4}\right)^{\frac{t}{2}} = \log 2^3$$

Aplicando as propriedades do logaritmo:

$$\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Teremos:

$$\log\left(\frac{2^7}{3^4}\right)^{\frac{t}{2}} = \log 2^3$$

$$\frac{t}{2}(\log 2^7 - \log 3^4) = 3.\log 2$$

$$t = \frac{6\log 2}{7\log 2 - 4\log 3}$$

Usando as informações disponíveis:

$$t = \frac{6.0{,}3}{7.0{,}3 - 4.0{,}48} = \frac{18}{1{,}8} = 10$$

Então, podemos concluir que o comprador só poderá adquirir o carro depois de 10 anos.

### 3.3.2 Aplicações financeiras

I - Um capital de R$ 18000,00 foi aplicado durante 15 meses em regime de juros compostos, a remuneração obtida foi de R$ 10043,40. Qual foi a taxa mensal dessa aplicação?

Para a resolução dessa questão calcularemos o montante gerado:

$$M = C + J = 18000 + 10043{,}40 = 28043{,}40$$

E então utilizaremos o modelo de montante para juros compostos para iniciar o calculo da taxa que gerou a remuneração no tempo de 15 meses:

$$M = C.(1 + i)^{n}$$

$$28043{,}40 = 18000.(1 + i)^{15}$$

$$\frac{28043{,}40}{18000{,}00} = (1 + i)^{15}$$

$$1{,}558 = (1 + i)^{15}$$

Usando o logaritmo neperiano em ambos os lados da equação:

$$\ln(1 + i)^{15} = \ln 1{,}558$$

$$\ln(1 + i)^{15} = 0{,}443402947$$

Aplicando a propriedade do logaritmo:

$$\log_{a}(b^{t}) = t \cdot \log_{a} b$$

$$15 \ln(1 + i) = 0{,}443402947$$

$$\ln(1 + i) = \frac{0{,}443402947}{15}$$

$$\ln(1 + i) = 0{,}02956$$

A base do logaritmo neperiano é o numero de Neper ($e = 2{,}71828$).

$$\log_{e}(1 + i) = 0{,}02956$$

$$1 + i = e^{0,02956}$$

$$1 + i = 1,030001234$$

$$i = 1,030001234 - 1$$

$$i \cong 0,03$$

$$i \cong 3\%$$

Portanto, a taxa que o capital de R$ 18000,00 foi aplicado por 15 meses foi de aproximadamente 3% para render juros de R$ 10043,40.

II - Você aplicou R$50000,00 à taxa de juro composto de 12% ao ano. Quantos anos serão necessários para triplicar o valor?

Ao triplicar o valor aplicado de R$50000,00 o valor de resgate será de 3 vezes R$50000,00 = R$150000,00. Com este dado, é possível chegar à solução usando a fórmula direta do prazo da operação:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{\ln(1 + i)}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{150000}{50000}\right)}{\ln(1 + 0,12)}$$

$$n = \frac{\ln(3)}{\ln(1,12)}$$

$$n = \frac{1,0986}{0,11333} = 9,69$$

Este resultado mostra que são necessários 9,69 anos para triplicar o capital inicial de R$50.000 aplicados à taxa de juro de 12% ao ano.

III - Se forem aplicados R$100000,00 pelo regime de capitalização composta, obtendo um resgate de R$123000,00 após 13 meses, qual a taxa de juro da aplicação?

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$i = \left(\frac{123000}{100000}\right)^{\frac{1}{13}} - 1$$

$$i = (1{,}23)^{0{,}076923} - 1$$

$$i = 1{,}01605 - 1 = 0{,}01605$$

Portanto, a taxa de juro da aplicação é de 1,605 % ao mês.

# CONCLUSÃO

A invenção dos logaritmos foi de grande importância para o avanço da tecnologia, o homem procurou desenvolver ferramentas matemáticas que propiciassem novos conhecimentos, dando mais rapidez aos cálculos utilizados a partir do século XVI, suas aplicações tomaram rumos diversos, expandindo, dessa forma, suas áreas de atuação.

Atualmente o uso de tabelas logarítmicas é inviável, com o advento das calculadoras eletrônicas e dos computadores tais tabelas de tornaram obsoletas, porem não podemos diminuir seu valor ao longo da construção da historia da matemática. A tecnologia permite cálculos com uma rapidez e precisão nem imaginada por Napier e seus contemporâneos.

Com o auxilio de funções logarítmicas e exponenciais podemos modelar ou dimensionar vários fenômenos que antes desses instrumentos matemáticos eram incógnitas para o conhecimento humano.

O objetivo do estudo foi explicar a relação entre a matemática financeira e as funções logarítmicas e exponenciais, ao longo dos capítulos foram fornecidos subsídios para que esse objetivo fosse alcançado. Abordamos as definições de funções exponenciais e logarítmicas e justificativas para seu estudo, e através de exemplos práticos foram demonstradas algumas das aplicabilidades dessa teoria.

A aplicação de funções logarítmicas e exponenciais à matemática financeira é um importante instrumento de calculo em vários tópicos e facilitador de situações cotidianas sem o qual muitos cálculos seriam longos e complicados. Sendo assim a importância desses elementos matemáticos deve ser ressaltada e levada à sala de aula para que os alunos possam ter o conhecimento de sua tamanha utilidade.

**REFERENCIAS**


ALENCAR, M. F. C. R. **Noções básicas sobre juros e o combate à usura**. *JusNavigandi*, Teresina, ano 10, n. 1000, 28 mar. 2006. Disponível em: http://jus2.uol.com.br/doutrina/texto.asp?id=8158>. Acesso em: 26/11/2015.

ÁVILA, Geraldo Severo de S. **Calculo I: Diferencial e Integral.** Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1978.

ÁVILA, Geraldo Severo de S. **Como se constrói uma tabela de logaritmos.** RPM 26, Campinas, SBM, 1994.

BOYER, Carl B. **Historia da matemática.** São Paulo, Editora E. Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - PCN+: Ensino Médio. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica -Brasília: MEC ; SEMTEC, 2002.

COLLETTE, Jean Paul. **El Comienzo de Las Matemáticas Modernas.** Espanha: Ed. Siglo XXI, 1985.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da Realidade à Ação.** São Paulo, Sammus editorial, 1986.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e aplicações.** São Paulo: Editora Filiada, 1999, v. 1.

DIENES, Zoltan Paul. **Aprendizado Moderno da Matemática.** Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1970.

EVES, Howard Whitley. **Introdução a história da matemática.** Campinas, Editora UNICAMP, 1995.

FERNANDES, Susana da Silva. **A Contextualização no Ensino de Matemática**. Distrito Federal, 2006.

GIANNETTI, E. **O valor do amanhã: ensaio sobre a natureza dos juros**. São Paulo: Companhia das Letras, 2005.

GONÇALVES, J. P. **A história da matemática comercial e financeira.** Disponível em: http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira4.php>. Acesso em: 26/11/2015.

IEZZI, Gelson. **Matemática ciência e aplicação.** São Paulo: Ed. Atual, 2004. v. 1.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo.** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1.

JOSÉ MACHADO, Nilson. **Matemática e Realidade.** São Paulo, Cortez Editora, Autores Associados, 1987.

LAUREANO, J. L.; LEITE, O. V. **Os segredos da matemática financeira**. São Paulo: Ática, 1987.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real.** Rio de Janeiro, IMPA, 2008 v. 1.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos.** Editora Alterosa, 1980.

MATHIAS, W. F.; GOMES, J. M. **Matemática financeira.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2004.

MENDES, Iran Abreu; SOARES, Evanildo Costa. **A criação dos logaritmos nos fins do século XVI: as contribuições de Napier, Briggs e Burgi.** In: MENDES, Iran Abreu (Org.). A matemática no século de Andrea Palladio. Natal: Edufrn, 2008.

PARENTE, E.; CARIBÉ, R. **Matemática comercial e financeira.** São Paulo: FTD, 1996.

PUCCINI, A. de L. **Matemática financeira objetiva e aplicada.** 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

ROBERT, J. **A origem do dinheiro.** 2. ed. São Paulo: Global, 1989.

SANTOS, G. L. da C. **Educação financeira: a matemática financeira sob nova perspectiva.** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2005.

SCHNEIDER, I. J. **Matemática financeira: um conhecimento importante e necessário para a vida das pessoas**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2008.