NEAD – Núcleo de Educação a Distância

COLIMAT – Coordenadoria do Curso de Licenciatura em Matemática

TCC – Trabalho de Conclusão de Curso

Números Bi-Harmônicos Semiprimos

Trabalho de Conclusão de Curso elaborado como um dos requisitos para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática da UFSJ.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila

Orientando: Fabiano Belchior

São João del-Rei, Novembro de 2016

FABIANO BELCHIOR

NÚMEROS BI-HARMÔNICOS SEMIPRIMOS

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática a Distância, da Universidade Federal de São João del-Rei.

Os componentes da banca de avaliação, abaixo identificados, consideram este trabalho aprovado.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. (Jorge Andrés Julca Avila)
(UFSJ)

____

Prof.º Dr. (José Angel Dávalos Chuquipoma)
(UFSJ)

Data da aprovação: São João del-Rei, _____ de ______________________ de ________

Dedico este trabalho de conclusão à minha esposa, filhos e familiares que me incentivaram nos momentos em que desanimei; ao meu pai Luiz Belchior (in memoriam) que apesar de não estar presente tenho certeza que estaria feliz; aos meus amigos do curso, onde juntos lutamos em busca de mais uma conquista; e aos meus colegas de profissão que ao longo do curso despertaram em mim cada vez mais o comprometimento em ser professor. Este trabalho foi apresentado no dia 26/11/2016. Três dias antes, dia 23/11/2016, morre minha mãe, Zofia Panonko Belchior. Fique com Deus mãe!

AGRADECIMENTOS

Eu agradeço primeiramente a Deus que preparou esta licenciatura, assim como me proporcionou forças e fé quando não tinha. Agradeço os meus tutores presenciais Camila, Mara e Ronaldo, que me auxiliaram durante toda a minha trajetória com tanta dedicação; ao meu orientador Dr. Jorge Andrés Julca Avila, por seu exemplo, dedicação e empenho para com este curso; aos meus colegas da turma do Polo de Franca, muito obrigado pelo apoio; a equipe da E.E. Mario D'Elia, onde desenvolvi meus trabalhos de estágio; aos meus irmãos, à minha querida esposa e filhos que me apoiaram e não me deixaram desistir; à minha querida mãe que sempre me incentivou a lutar e buscar os meus sonhos, possibilitando concretizar esta Licenciatura em Matemática pela Universidade de São João del-Rei. Agradeço ainda a Deus por ter me dado uma mãe tão especial e muito amada por mim e todos de sua família. Uma menina polonesa de 5 anos, refugiada por 10 na Alemanha por causa da 2º guerra mundial, foi parar no Brasil. Teve 9 filhos. Eu sou um deles. Muito obrigado!

RESUMO

Os números primos sempre foram, são, e serão um tema fascinante dentro das Matemáticas. Eles estudam-se, de uma forma simples, no Ensino Médio. No Ensino Superior, basicamente em Teoria de Números, estudam-se as propriedades, testes de primalidade e distribuição dos números primos. Neste trabalho, segundo ABRATE et al., estudaremos um novo tipo de números os chamados *Números Bi-Harmônicos Semiprimos* que são de grande utilidade nas sequências recorrentes lineares que resolvem certas equações Diofantinas.

Palavras-chave: Números Primos, Números Harmônico, Média Harmônica, Números Bi-Harmônicos e Médias Bi-Harmônicos.

ABSTRACT

The prime numbers have always been, are, and will be a fascinating subject within Mathematics. They study in a simple way in high school. In Higher Education, basically in Number Theory, we study the properties, primality tests and distribution of prime numbers. In this work, according to ABRATE et al., We will study a new type of numbers called the Semi-Bi-Harmonic Numbers that are of great use in the linear recurrent sequences that solve certain Diophantine equations.

Keywords: Primal Numbers, Harmonic Numbers, Harmonic Mean, Bi-Harmonic Numbers and Bi-Harmonic Mean.

SUMÁRIO

1. Introdução

Ciência e tecnologia são definições diferentes, mas sempre andam juntas. Ambas nasceram da necessidade do ser humano. A ciência pela necessidade de conhecer, a tecnologia pela necessidade de fazer. A necessidade de explorar a natureza incentivou alguns pensadores antigos a encontrar ferramentas matemáticas apropriadas capazes de extrapolar dados numéricos. A média aritmética é uma das quantidades mais antigos introduzida para essa finalidade, a fim de encontrar um único valor aproximada de alguma quantidade física a partir dos dados empíricos, sendo usado pela primeira vez durante o século III a.C. pelos antigos astrônomos babilônios, em seus estudos sobre as posições e movimentos das estrelas. A relevância matemática da média aritmética tem sido reforçada pelo astrônomo grego Hiparco (190-120 a.C.). Outros matemáticos gregos, seguindo os ideais de Pitágoras, também introduziram e rigorosamente definiram mais tipos destes meios. Por exemplo, Archytas (428-360 a.C.) nomeou a média harmônica que é usado na teoria da música e nos algoritmos para duplicação do cubo. Seu discípulo Eudoxus (408-355 a.C.) introduziu a média contra-harmônica em seus estudos sobre proporções. O livro de Bullen [2] é uma referência clássica para um bom levantamento sobre os vários tipos de meios e sua história.

Neste trabalho, vamos concentrar a nossa atenção sobre alguns aspectos aritméticos relacionado com a média mais utilizado em muitos campos da matemática. Também definiremos um novo tipo de média, mostrando como também permite dar uma nova caracterização para os números primos. Começamos recordando as algumas definições clássicas para finalmente definir os números bi-harmônicos, verificarmos sua relação com os números primos para podermos perceber que os números bi-harmônicos são semiprimos.

2. Resultados Preliminares

Nesta seção definiremos alguns conceitos importantes para a compreensão do teorema principal.

2.1 Conjuntos Elementares

Definiremos o conjunto dos números naturais, inteiros e racionais.

Definição 2.1 (Conjunto dos Números Naturais) O conjunto dos números naturais é definido por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \tag{1}$$

Notação 2.1

a) $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

Definição 2.2 (Conjunto dos Números Inteiros) O conjunto dos números Inteiros é definido por

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \tag{2}$$

Definição 2.3 (Conjunto dos Números Racionais) O conjunto dos números Racionais é definido por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} :\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\} \tag{3}$$

Observação 2.1 Um número racional é chamado, também de *Fração*.

Notação 2.2 (Conjunto dos Números Reais)

a) O conjunto dos números Reais é denotado $\mathbb{R}$.

b) O conjunto dos números Reais positivos é denotado $\mathbb{R}^+$.

c) O conjunto dos números Reais negativo é denotado $\mathbb{R}^-$.

Definição 2.4 (Divisibilidade) Seja $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Dizemos que a divide a b, e denotamos $a \mid b$, se existe um número $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$. Caso contrário, dizemos que a não divide a b, e denotamos $a \nmid b$.

2.2 Números Primos

Os números primos, do latim primus e vem sendo estudados pelos matemáticos desde 500 a.C., têm este nome devido aos gregos, que dividiam os números em primeiros ou indecomponíveis e secundários ou compostos. Os compostos são secundários, pois são formados a partir dos primeiros. Entre os matemáticos gregos, os pitagóricos (aprox. 500 – 300 a.C.) foram os primeiros a se interessarem pelas propriedades “místicas” dos números.

Definição 2.5 (Número Primo). Seja $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Dizemos que n é um número primo se seus únicos divisores são a unidade e ele mesmo.

Exemplo 2.1 O 7 é um número primo, pois os únicos divisores são: 1 e 7.

Notação 2.3

a) Denotaremos o *Conjunto dos Números Primos* por

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...\} \tag{4}$$

b) Denotaremos o *Conjunto dos Números Primos* ímpares por

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \setminus \{2\} \tag{5}$$

Definição 2.6 (Primos entre si) Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$. Dizemos que p e q são *primos entre si*, se o máximo divisor comum de p e q é a unidade.

Definição 2.7 (Número Irredutível). Dizemos que a fração p/q é irredutível se p e q são primos entre si, ou seja, ela não pode ser simplificada.

Notação 2.4

a) **Divisores de um número n.** Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Denotamos por $D(n)$ o conjunto de todos os divisores de n, isto é,

$$D(n) = \{d_1, d_2, ..., d_k\} \tag{6}$$

Note que $d_i \mid n$ para todo $i = 1, 2, ..., k$.

b) **Número de divisores positivos de um número n.** Seja $n \in \mathbb{N}^*$. O número de divisores de n é denotado por $d(n)$, isto é,

$$d(n) = \# D(n) \tag{7}$$

onde, o símbolo $\#$ denota o cardinal de um conjunto.

c) **Soma dos divisores de um número**. Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Denotamos por $\sigma(n)$ a soma de todos os divisores de n, isto é,

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d \tag{8}$$

onde, $d \in D(n)$.

Teorema 2.1 *Seja* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$ *, a decomposição de um número* $n > 1$ *nas condições do Teorema Fundamental da Aritmética. Então, o número de divisores positivos de* n *e a soma de todos esses divisores estão dados, respectivamente, por*

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_r + 1) \tag{9}$$

$$\sigma(n) = \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \right) \left(\frac{p_1^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \right) ... \left(\frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_r - 1} \right) \tag{10}$$

Demonstração. A prova deste Teorema é encontrada em CARVALHO (PROFMAT).

Definição 2.8 (Número Perfeito) Dizemos que $n \in \mathbb{N}^*$ é um número perfeito se

$$\sigma(n) = 2n \tag{11}$$

Exemplo 2.2 O número 6 é perfeito, pois, $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ e $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2(6)$.

2.3 Séries

Uma das séries numéricas mais famosa é a série harmônica.

Definição 2.9 (A Série Harmônica). Definimos a série harmônica por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... \tag{12}$$

Teorema 2.2 *A série harmônica diverge.*

Demonstração. Uma prova desse teorema é encontrada em STEWART (2008).

Teremos assim, como resultado de uma soma ou média de números harmônicos, uma fração. E como saber se este número é primo.

2.4 Médias

Em matemática, média é uma das medidas de tendência central ou medida de posição. Considere a sequência finita $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ de números reais positivos, onde k é um número inteiro positivo. Podemos definir as seguintes médias: Média Harmônica, Média Geométrica, Média Aritmética e Média Contra-Harmônica.

2.4.1 Média Aritmética

A média aritmética dos k - números: $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$, é definida por

$$A(a_1, a_2, ..., a_k) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k} \tag{13}$$

2.4.2 Média Geométrica

A média geométrica dos k - números: $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$, é definida por

$$G(a_1, a_2, ..., a_k) = \sqrt[k]{a_1 a_2 \, ... \, a_k} \tag{14}$$

2.4.3 Média Harmônica

A média harmônica dos k - números: $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$, é definida por

$$H(a_1, a_2, ..., a_k) = \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k}} \tag{15}$$

2.4.4 Média Contra-Harmônica

A média contra-harmônica dos k - números: $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$, é definida por

$$C(a_1, a_2, ..., a_k) = \frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2}{a_1 + a_2 + ... + a_k} \tag{16}$$

Teorema 2.3 (Desigualdades das Médias). *Para toda coleção de k-números reais $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, ..., k$, se verificam as seguintes desigualdades:*

$$
\begin{aligned}
\min(a_1, a_2, ..., a_k) \quad &\leq \\
& H(a_1, a_2, ..., a_k) \leq G(a_1, a_2, ..., a_k) \leq A(a_1, a_2, ..., a_k) \leq C(a_1, a_2, ..., a_k) \quad (17) \\
&\leq \quad \max(a_1, a_2, ..., a_k)
\end{aligned}
$$

Demonstração. A demonstração da desigualdade (17) encontra-se em OLIVEIRA e FERNANDEZ (2010).

Em 1948 Ore Oystein (OYSTEIN, 1948) avaliou as quatro médias de todos os divisores de um número inteiro positivo. Esse resultado é explicado no Teorema 2.4.

Definição 2.10 (Médias dos Divisores de um Número) Seja $n \in \mathbb{N}^*$ e $D(n) = \{d_1, d_2, ..., d_k\}$. Definimos:

a) Média Aritmética dos divisores de n:

$$A(n) = A(d_1, d_2, ..., d_k) \tag{18}$$

b) Média Geométrica dos divisores de n:

$$G(n) = G(d_1, d_2, ..., d_k) \tag{19}$$

c) Média Harmônica dos divisores de n:

$$H(n) = H(d_1, d_2, ..., d_k) \tag{20}$$

d) Média Contra-Harmônica dos divisores de n:

$$C(n) = C(d_1, d_2, ..., d_k) \tag{21}$$

Definição 2.11 (Função Divisor) A função divisor é definida por

$$\sigma_r(n) = \sum_{i=1}^{k} d_i^r \tag{22}$$

onde $r \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.3

a) Se $r = 0$ então $\sigma_0(n) = d(n) = k$

b) Se $r = 1$ então $\sigma_1(n) = \sigma(n)$

c) Se $r = 2$ então $\sigma_2(n) = \sum_{i=1}^{k} d_i^2 = d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_k^2$

Teorema 2.4 *Seja* $n \in \mathbb{N}^*$. *Então a média aritmética, geométrica, harmônica e contra-harmônica dos divisores de* n *são, respectivamente,*

$$A(n) = \frac{\sigma_1(n)}{\sigma_0(n)} \tag{23}$$

$$G(n) = \sqrt{n} \tag{24}$$

$$H(n) = \frac{n\sigma_0(n)}{\sigma_1(n)} \tag{25}$$

$$C(n) = \frac{\sigma_2(n)}{\sigma_1(n)} \tag{26}$$

Demonstração. A demonstração deste Teorema é encontrada em ABRATE et al. (2016).

Corolário 2.1 *Para qualquer* $n \in \mathbb{N}^*$, *temos*

$$G(n) \;=\; G\big(H(n),\, A(n)\big) \tag{27}$$

Demonstração. De (14), a média geométrica de $\{H(n),\ A(n)\}$ é

$$G\big(H(n), A(n)\big) = \sqrt{H(n)A(n)} \tag{28}$$

De (23) e (25), temos que

$$G\big(H(n), A(n)\big) = \sqrt{\frac{n\,\cancel{\sigma_0(n)}}{\cancel{\sigma_1(n)}}\,\frac{\cancel{\sigma_1(n)}}{\cancel{\sigma_0(n)}}} = \sqrt{n} = G(n) \tag{29}$$

Exemplo 2.4 Seja $n = p^2q$, onde $p, q \in \mathcal{P}$. Então, $D(n) = \{1, p, q, p^2, pq, p^2q\}$,

$$H(n) = \frac{6}{\frac{1}{1} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{pq} + \frac{1}{p^2q}} = \frac{6p^2q}{p^2q + pq + p^2 + p + 1} \quad , \quad A(n) = \frac{p^2q + pq + p^2 + p + 1}{6}.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
G\big(H(n),\ A(n)\big) &= \sqrt{H(n)A(n)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{6p^2q}{p^2q+pq+p^2+p+1}\right)\left(\frac{p^2q+pq+p^2+p+1}{6}\right)} \\
&= \sqrt{p^2q} \\
&= \sqrt{n}
\end{aligned}
\tag{30}
$$

e

$$
G(n) = G(1, p, q, p^2, pq, p^2q) = \sqrt[6]{pqp^2pqp^2q} = \sqrt[6]{p^6q^3} = \left[\left(p^2q\right)^3\right]^{\frac{1}{6}} = \sqrt{p^2q} = \sqrt{n} \tag{31}
$$

De (30) e (31) temos (27).

Observação 2.2

a) Será que as médias dos divisores de um inteiro positivo n também é um número inteiro? O caso de $G(n)$ não seria tão interessante, pois $G(n)$ é um número inteiro, se e somente se, n é um quadrado perfeito.

b) Os *números aritméticos* (em OEIS [6] denotada por A003601):

$$
\begin{aligned}
&1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 13,\ 14,\ 15,\ 17,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 27,\ 29,\ 30, \\
&31,\ 33,\ 35,\ 37,\ 38,\ 39,\ 41,\ 42,\ 43,\ 44,\ 45,\ 46,\ 47,\ 49,\ 51,\ 53, \\
&54,\ 55,\ 56,\ 57,\ 59,\ 60,\ 61,\ 62,\ 65,\ 66,\ 67,\ 68,\ 69,\ 70,\ 71,\ 73, \\
&77,\ 78,\ 79,\ 83,\ 85,\ 86,\ 87,\ 89,\ 91,\ 92,\ 93,\ 94,\ 95,\ 96,\ 97,\ 99, \\
&101,\ 102,\ 103,\ 105
\end{aligned}
\tag{32}
$$

é uma sequência de números inteiros, onde os divisores de cada termo tem média aritmética um número inteiro.

c) A seguinte sequência (em OEIS [6] denotada por A020487):

$$
\begin{aligned}
&1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 20,\ 25,\ 36,\ 49,\ 50,\ 64,\ 81,\ 100,\ 117,\ 121,\ 144,\ 169,\ 180,\ 196, \\
&200, 225, 242,\ 256,\ 289,\ 324,\ 325,\ 361,\ 400,\ 441,\ 450,\ 468,\ 484,\ 500,\ 529, \\
&576,\ 578, 605,\ 625, 650,\ 676,\ 729,\ 784,\ 800,\ 841,\ 900,\ 961,\ 968,\ 980,\ 1024, \\
&1025,\ 1058, 1089,\ 1156,\ 1225, 1280,\ 1296
\end{aligned}
\tag{33}
$$

é caracterizada porque os divisores de cada termo tem sua média contra-harmônica um número inteiro. Por exemplo, o termo $n = 20$ tem os divisores $D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ e sua média contra-harmônica é $C(20) = \dfrac{1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 10^2 + 20^2}{1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20} = \dfrac{546}{42} = 13$.

2.5 Número Harmônico

Foi em 1948 que Ore Oystein (OYSTEIN, 1948) introduze a ideia de números harmônicos. O caso mais interessante está relacionado com a média harmónica. Ore fornece a seguinte definição.

Definição 2.12 (Número Harmônico) Seja $n \in \mathbb{Z}^+$. Dizemos que n é um *número harmônico* se a média harmônica dos divisores de n é um número inteiro, isto é, se $H(n) \in \mathbb{Z}$.

Segundo a Definição 2.8 podemos dizer que um número n é harmônico se

$$H(n) = \frac{\text{número de divisores de } n}{\text{soma dos inversos dos divisores de } n} \in \mathbb{Z} \tag{34}$$

Exemplo 2.4. Vejamos se alguns números inteiros positivos são harmônicos.

a) O número 1.

$D(1) = \{1\}$

$$H(1) = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1$$

Portanto 1 é um número harmônico.

b) O número 2.

$D(2) = \{1, 2\}$

$$H(2) = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

Portanto 2 não é um número harmônico.

c) O número 3.

$D(2) = \{1, 3\}$

$$H(3) = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Portanto 3 não é um número harmônico.

d) O número 4.

$D(4) = \{1, 2, 4\}$

$$H(4) = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{12}{7}$$

Portanto 4 não é um número harmônico.

e) O número 5.

$D(5) = \{1, 5\}$

$$H(5) = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{5}} = \frac{5}{3}$$

Portanto o número 5 não é um número harmônico.

f) O número 6.

$D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$

$$H(6) = \frac{4}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 2$$

Portanto o número 6 é um número harmônico.

g) O número 7.

$D(7) = \{1, 7\}$

$$H(7)=\frac{2}{\frac{1}{1}+\frac{1}{7}}=\frac{7}{4}$$

Portanto o número 7 não é um número divisor harmônico.

Continuando o teste, obtemos os 16 primeiros *números harmônicos*:

$$\begin{array}{l} 1,\ 6,\ 28,\ 140,\ 270,\ 496,\ 672,\ 1638,\ 2970,\ 6200,\ 8128,\ 8190,\ 18600, \\ 18620,\ 27846,\ 30240,\ ... \end{array} \tag{35}$$

Estes números harmônicos são os elementos da sequência A001599 (OEIS), a qual é mais completa. Agora a média harmônica dos divisores de cada termo dos números harmônicos, na sequência (35), é dada pela sequência A001600 (OEIS):

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 5,\ 8,\ 9,\ 11,\ 10,\ 7,\ 15,\ 15,\ 14,\ 17,\ 24,\ 24,\ 21,\ 13, \\ 19,\ 27,\ 25,\ 29,\ 26,\ 44,\ 44,\ 29,\ 46,\ 39,\ 46,\ 27,\ 42,\ 47,\ 47,\ 54, \\ 35,\ 41,\ 60,\ 51,\ 37,\ 48,\ 45,\ 49,\ 50,\ 49,\ 53,\ 77,\ 86,\ 86,\ 51,\ 96, \\ 75,\ 70,\ 80,\ 99,\ 110,\ 81,\ 84,\ 13,\ 102,\ 82,\ 96,\ 114,\ 53,\ 108,\ 115, \\ 105,\ 116,\ 91,\ 85,\ 105 \end{array} \tag{36}$$

Corolário 2.2 *Todo número perfeito é um número harmônico.*

Prova. Seja n um número perfeito, então, por (11) temos $\sigma(n)=\sigma_1(n)=2n$. De (25) temos que $H(n)=\frac{n\sigma_0(n)}{\sigma_1(n)}=\frac{nd(n)}{2n}=\frac{d(n)}{2}$. Vamos supor primeiro, que n é par, então $n=2^{\alpha}p$, onde $p\in\mathcal{P}^*$, então por (9) $d(n)=(\alpha+1)(1+1)=2(\alpha+1)$. Assim, $H(n)=\alpha+1\in\mathbb{Z}$. Logo n é um numero harmônico. Agora, se n é ímpar, então, segundo o Teorema Fundamental da Aritmética $n=p_1^{\alpha_1}p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$ onde $p_i\in\mathcal{P}^*$. Sabemos que n é perfeito, então a soma dos divisores de n é par. Assim, de (10), uns dos fatores deveria ser múltiplo de 2 e, portanto, divisível por 2. Sem perda de generalidade, podemos assumir que o primeiro fator é divisível por 2. Logo, $\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}=2k$, para algum inteiro positivo k. Porém,

$$p_1^{\alpha_1+1}-1=\left(p_1-1\right)\left(p_1^{\alpha_1}+p_1^{\alpha_1-1}+...+p_1^2+p_1^1+1\right)$$

Logo, $p_1^{\alpha_1} + p_1^{\alpha_1 - 1} + ... + p_1^2 + p_1^1 = 2k - 1$. Por outro lado sabemos que a soma de um número ímpar de termos ímpares da um número ímpar. Assim, α_1 tem que ser um número ímpar. Sendo assim $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_r + 1)$ é um número par. Logo, $H(n) = \frac{d(n)}{2} \in \mathbb{Z}$. Portanto n é um número harmônico.

3. O Teorema Principal

Nessa Seção abordaremos definições e/ou resultados para poder enunciar o Teorema Principal desse trabalho, que se refere a um teste de Primalidade.

Definição 3.1 (Média Bi-Harmônica) A média bi-harmônica dos k- números $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$, é definida pela média aritmética dos números: $H(a_1, a_2, ..., a_k)$ e $C(a_1, a_2, ..., a_k)$, isto é,

$$B(a_{1,}, a_2, ..., a_k) := A\left(H(a_1, a_2, ..., a_k), C(a_1, a_2, ..., a_k)\right) = \frac{H(a_1, a_2, ..., a_k) + C(a_1, a_2, ..., a_k)}{2} \quad (37)$$

Definição 3.2 (Média Bi-harmônica dos divisores de n). Seja $n \in \mathbb{N}^*$ e $D(n) = \{d_1, d_2, ..., d_k\}$. Definimos a Média Bi-harmônica dos dividores de n por

$$B(n) = B(d_1, d_2, ..., d_k) \quad (38)$$

Definição 3.3 (Número Bi-Harmônico) Seja $n \in \mathbb{Z}^+$. Dizemos que n é um *número bi-harmônico* se a média bi-harmônica dos divisores de n é um número inteiro, isto é, se $B(n) \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.1 *Seja* $n \in \mathbb{N}^*$. *Então a média bi-harmônica, é dada por*

$$B(n) = \frac{n\sigma_0(n) + \sigma_2(n)}{2\sigma_1(n)} \quad (39)$$

Prova. De (38) e (37), temos $B(n)=\dfrac{H(d_1,d_2,...,d_k)+C(d_1,d_2,...,d_k)}{2}$. Substituindo (20) e (21) na última equação, temos $B(n)=\dfrac{H(n)+C(n)}{2}$. De (25) e (26), temos

$$B(n)=\frac{\dfrac{n\sigma_0(n)}{\sigma_1(n)}+\dfrac{\sigma_2(n)}{\sigma_1(n)}}{2}=\frac{\dfrac{n\sigma_0(n)+\sigma_2(n)}{\sigma_1(n)}}{2}=\frac{n\sigma_0(n)+\sigma_2(n)}{2\sigma_1(n)}.$$

Na Tabela 3.1 encontraremos os primeiros números bi-harmônicos, segundo (39). Para fazer isso usaremos tentativas para o valor de n:

Tabela 3.1. Os primeiros números bi-harmônicos.

n	$D=\{d_1,d_2,...,d_k\}$	$\sigma_0(n)$	$\sigma_1(n)$	$\sigma_2(n)$	$B(n)=\dfrac{n\sigma_0(n)+\sigma_2(n)}{2\sigma_1(n)}$	é bi-harmônico?
1	$\{1\}$	1	1	1	$B(1)=\left(1(1)+1\right)/2(1)$ $=1$	Sim
2	$\{1,2\}$	2	3	5	$B(2)=\left(2(2)+5\right)/2(3)$ $=3/2$	Não
3	$\{1,3\}$	2	4	10	$B(3)=\left(3(2)+10\right)/2(4)$ $=2$	Sim
4	$\{1,2,4\}$	3	7	21	$B(4)=\left(4(3)+21\right)/2(7)$ $=33/14$	Não
5	$\{1,5\}$	2	6	26	$B(5)=\left(5(2)+26\right)/2(6)$ $=3$	Sim
6	$\{1,2,3,6\}$	4	12	50	$B(6)=\left(6(4)+50\right)/2(12)$ $=37/12$	Não
7	$\{1,7\}$	2	8	50	$B(7)=\left(7(2)+50\right)/2(8)$ $=4$	Sim
$\vdots$						

Segundo a Tabela 3.1 os números 1, 3, 5 e 7 são números bi-harmônicos. Uma relação um pouco maior é dada pela seguinte sequência:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 35,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 53,\ 59,\ 61,\ ... \qquad (40)$$

Mas, a sequência (40) com todos seus termos já faz parte da sequência A210494 (OEIS):

$$\begin{array}{l} 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 35,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 53,\ 59,\ 61,\ 67, \\ 71,\ 73,\ 79,\ 83,\ 89,\ 97,\ 101,\ 103,\ 107,\ 109,\ 113,\ 119,\ 127,\ 131,\ 137,\ 139, \\ 149,\ 151,\ 157,\ 163,\ 167,\ 173,\ 179,\ 181,\ 191,\ 193,\ 197,\ 199,\ 211,\ 223,\ 227, \\ 229,\ 233,\ 239,\ 241,\ 251,\ 257,\ 263 \end{array} \quad (41)$$

Exemplo 3.1 Se $n = pq$, para $p, q \in \mathcal{P}$ encontre $B(n)$. Vejamos $D(n) = \{1, p, q, pq\}$, $\sigma_0(n) = 4$, $\sigma_1(n) = 1 + p + q + pq$ e $\sigma_2(n) = 1 + p^2 + q^2 + p^2q^2$. De (39) a média bi-harmônica de n é

$$B(n) = \frac{n\sigma_0(n) + \sigma_2(n)}{2\sigma_1(n)} = \frac{pq(4) + 1 + p^2 + q^2 + p^2q^2}{2(1 + p + q + pq)} = \frac{(p+q)^2 + (pq+1)^2}{2(p+1)(q+1)} \quad (42)$$

Note que esta sequência é muito similar à sequência de números primos. Isso não é tão estranho, conforme mostramos no seguinte teorema.

Teorema 3.2 Se $p \in \mathcal{P}^*$ então p é um número bi-harmônico e $B(p) = \frac{p+1}{2}$.

Demonstração. A prova deste teorema é a apresentada na Tabela 3.2.

Tabela 3.2. Verificação se um número primo é bi-harmônico.

n	$D = \{d_1, d_2, ..., d_k\}$	$\sigma_0(n)$	$\sigma_1(n)$	$\sigma_2(n)$	$B(n) = \frac{n\sigma_0(n) + \sigma_2(n)}{2\sigma_1(n)}$	é bi-harmônico ?
p	$\{1, p\}$	2	$1 + p$	$1 + p^2$	$B(p) = \left(p(2) + 1 + p^2\right) / 2(1+p)$ $= (1+p)^2 / 2(1+p)$ $= \frac{1+p}{2} \in \mathbb{Z}$	Sim

Note que o Teorema 3.2 é uma condição necessária, para um número ser primo, isto é, se um número ímpar é primo então ele é um número bi-harmônico. Desse modo, é natural, perguntar-se se a volta do Teorema 3.2 também é verdadeira, isto é, é suficiente um número n ser impar, bi-harmônico e satisfazer $(n+1)/2$ para ele ser primo? A resposta a esta pergunta é dada pelo seguinte teorema, o qual temos chamado de Teorema Principal, pois nos fornece um teste de Primalidade.

Teorema 3.3 (Teorema Principal). *Se* $n \neq 1$ *é número inteiro ímpar e satisfaz* $B(n) = \frac{n+1}{2}$ *então* n *é primo.*

Demonstração. Da hipótese desse Teorema: $B(n) = \frac{n+1}{2}$, e de (39), temos

$$\frac{n\sigma_0(n) + \sigma_2(n)}{2\sigma_1(n)} = \frac{n+1}{2} \tag{43}$$

ou, equivalentemente,

$$(n+1)\sigma_1(n) - \left(n\sigma_0(n) + \sigma_2(n)\right) = 0 \tag{44}$$

Vamos considerar dois casos para os valores de n: $n = k^2$ ou $n \neq k^2$.

i. ***Primeiro caso:*** $n = k^2$

Se $n = k^2 = \left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}\right)^2$ para algum $r \in \mathbb{N}^*$, $k \neq 1$. Logo, $n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} ... p_r^{2\alpha_r}$. Assim,

$$\sigma_0(n) = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)...(2\alpha_r + 1) = 2m + 1 \tag{45}$$

para algum $m \in \mathbb{N}^*$, pois o produto de números ímpares é ímpar. Então, $D(n) = \{d_1, d_2, ..., d_{m,} d_{m+1}, ..., d_{2m}, k\}$, onde $d_i \mid n$. Pela natureza de n podemos observar que,

$$n = d_{m+i} d_i, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{46}$$

E, para o divisor k, temos $n = tk$, para algum $t \in \mathbb{N}^*$, que nesse caso $t = k$. Por outro lado,

$$\sigma_1(n) = \sum_{i=1}^{2m} d_i + k \tag{47}$$

e,

$$\sigma_2(n) = \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + k^2 \tag{48}$$

Agora vamos verificar se a igualdade (44) é satisfeita. Comecemos com a primeira parcela:

$$
\begin{aligned}
(n+1)\sigma_1(n) &= (n+1)\left(\sum_{i=1}^{2m} d_i + k\right) = \sum_{i=1}^{2m} nd_i + nk + \sum_{i=1}^{2m} d_i + k \\
&= \sum_{i=1}^{2m} (d_{m+i}d_i)d_i + nk + \sum_{i=1}^{2m} d_i + k \\
&= \sum_{i=1}^{2m} d_{m+i}d_i^2 + nk + \sum_{i=1}^{2m} d_i + k \\
&= \sum_{i=1}^{m} d_{m+i}d_i^2 + \sum_{i=m+1}^{2m} d_{m+i}d_i^2 + nk + \sum_{i=1}^{m} d_i + \sum_{i=m+1}^{2m} d_i + k \quad \text{c} \\
&= \sum_{i=1}^{m} d_{m+i}d_i^2 + \sum_{i=1}^{m} d_i d_{m+i}^2 + nk + \sum_{i=1}^{m} d_i + \sum_{i=1}^{m} d_{m+i} + k \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left[d_i \left(d_i d_{m+i} + 1\right) + d_{m+i}\left(d_i d_{m+i} + 1\right)\right] + nk + k \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(d_i d_{m+i} + 1\right)\left(d_i + d_{m+i}\right) + k^3 + k
\end{aligned}
\tag{49}
$$

A segunda parcela:

$$
\begin{aligned}
n\sigma_0(n) + \sigma_2(n) &= n(2m+1) + \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + k^2 = 2nm + n + \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + k^2 \\
&= \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + 2mn + k^2 + k^2 = \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{2m} n + 2k^2 \\
&= \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{2m} \frac{d_i}{d_i} n + 2k^2 = \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{2m} d_i d_{m+i} + 2k^2 \\
&= \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{m} d_i d_{m+i} + \sum_{i=m+1}^{2m} d_i d_{m+i} + 2k^2 \\
&= \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{m} d_i d_{m+i} + \sum_{i=1}^{m} d_i d_{m+i} + 2k^2 = \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m} d_i d_{m+i} + 2k^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} d_i^2 + \sum_{i=m+1}^{2m} d_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m} d_i d_{m+i} + 2k^2 = \sum_{i=1}^{m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{m} d_{m+i}^2 + 2\sum_{i=1}^{m} d_i d_{m+i} + 2k^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(d_i + d_{m+i}\right)^2 + 2k^2
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Substituindo (49) e (50) no lado esquerdo de (44), temos

$$
\begin{aligned}
(n+1)\sigma_1(n) - \left(n\sigma_0(n) + \sigma_2(n)\right) &= \sum_{i=1}^{m} \left(d_i d_{m+i} + 1\right)\left(d_i + d_{m+i}\right) + k^3 + k - \left(\sum_{i=1}^{m} \left(d_i + d_{m+i}\right)^2 + 2k^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(d_i + d_{m+i}\right)\left[\left(d_i d_{m+i} + 1\right) + \left(d_i + d_{m+i}\right)\right] + k\left(k^2 + 1 - 2k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(d_i + d_{m+i}\right)\left[\left(d_i d_{m+i} + 1\right) + \left(d_i + d_{m+i}\right)\right] + k\left(k-1\right)^2 > 0
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Desse modo (51) nunca será zero.

ii. ***Segundo caso:*** $n \neq k^2$

De (45) $\sigma_0 = 2k+1$ se $n = k^2$. Então, se $n \neq k^2$ com $k \neq 1$, temos que

$$\sigma_0 = 2m \tag{52}$$

para algum $m \in \mathbb{N}^*$. Então, $D(n) = \{d_1, d_2, ..., d_{m,} d_{m+1}, ..., d_{2m}\}$, onde $d_i \mid n$. Pela natureza de n podemos observar que,

$$n = d_{m+i} d_i, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{53}$$

Por outro lado,

$$\sigma_1(n) = \sum_{i=1}^{2m} d_i \tag{54}$$

e,

$$\sigma_2(n) = \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 \tag{55}$$

Agora vamos verificar se a igualdade (44) é satisfeita. Comecemos com a primeira parcela:

$$\begin{aligned}(n+1)\sigma_1(n) &= (n+1)\left(\sum_{i=1}^{2m} d_i\right) = \sum_{i=1}^{2m} nd_i + \sum_{i=1}^{2m} d_i = \sum_{i=1}^{2m} (d_{m+i}d_i)d_i + \sum_{i=1}^{2m} d_i = \sum_{i=1}^{2m} d_{m+i}d_i^2 + \sum_{i=1}^{2m} d_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} d_{m+i}d_i^2 + \sum_{i=m+1}^{2m} d_{m+i}d_i^2 + \sum_{i=1}^{m} d_i + \sum_{i=m+1}^{2m} d_i = \sum_{i=1}^{m} d_{m+i}d_i^2 + \sum_{i=1}^{m} d_i d_{m+i}^2 + \sum_{i=1}^{m} d_i + \sum_{i=1}^{m} d_{m+i} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left[d_i\left(d_i d_{m+i}+1\right) + d_{m+i}\left(d_i d_{m+i}+1\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(d_i d_{m+i}+1\right)\left[d_i + d_{m+i}\right]\end{aligned} \tag{56}$$

A segunda parcela:

$$
\begin{aligned}
n\sigma_0(n)+\sigma_2(n) &= n(2m)+\sum_{i=1}^{2m} d_i^2 = \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + 2mn = \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{2m} n \\
&= \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{2m} \frac{d_i}{d_i} n = \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{2m} d_i d_{m+i} = \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{m} d_i d_{m+i} + \sum_{i=m+1}^{2m} d_i d_{m+i} \\
&= \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{m} d_i d_{m+i} + \sum_{i=1}^{m} d_i d_{m+i} = \sum_{i=1}^{2m} d_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m} d_i d_{m+i} \\
&= \sum_{i=1}^{m} d_i^2 + \sum_{i=m+1}^{2m} d_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m} d_i d_{m+i} = \sum_{i=1}^{m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{m} d_{m+i}^2 + 2\sum_{i=1}^{m} d_i d_{m+i} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(d_i + d_{m+i}\right)^2
\end{aligned} \tag{57}
$$

Substituindo (56) e (57) no lado esquerdo de (44), temos

$$
\begin{aligned}
(n+1)\sigma_1(n)-\left(n\sigma_0(n)+\sigma_2(n)\right) &= \sum_{i=1}^{m}\left(d_i d_{m+i}+1\right)\left(d_i+d_{m+i}\right) - \sum_{i=1}^{m}\left(d_i+d_{m+i}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(d_i+d_{m+i}\right)\left[\left(d_i d_{m+i}+1\right)-\left(d_i+d_{m+i}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(d_i+d_{m+i}\right)\left[d_i d_{m+i}+1-d_i-d_{m+i}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(d_i+d_{m+i}\right)\left[\left(d_i-1\right)+\left(d_{m+i}-1\right)\right]
\end{aligned} \tag{58}
$$

Observa-se que (58) somente vai ser zero se:

a) $d_i = 1$. De fato, é só substituir no segundo fator de (58).

b) $d_i = n$. De fato, pois de (53), $d_{m+1} = \dfrac{n}{d_i} = \dfrac{n}{n} = 1$. Assim, posso substituir em no segundo fator de (58).

Ambos os casos é verdade para todo $m \in \mathbb{N}^*$. Logo os únicos divisores de n pelo qual a relação (44) é verdadeira são o 1 e o n. Por tanto, $n \in \mathcal{P}^*$. □

Desse modo terminamos de mostrar o Teorema Principal de nosso trabalho.

Definição 3.4 (Número Bi-Harmônico Semiprimo). Dizemos que um número Bi-Harmônico n é Semiprimo se $n = pq$, para $p, q \in \mathcal{P}$ e $B(n) \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.2 Verifique se o número bi-harmônico 35 é semiprimo. De fato, $35 = 5 \times 7$ onde $\{5,7\} \in \mathcal{P}$ e de (42), temos $B(119) = \frac{(7+17)^2 + \left(7(17)+1\right)^2}{2(7+1)(17+1)} = \frac{576 + 14.400}{288} = 52 \in \mathbb{N}$. Logo 35 é um número bi-harmônico semiprimo.

Note que na sequência dos números bi-harmônicos (41) existem termos que não são primos, como o caso dos números 35, 119 , ...

4. Considerações Finais

Temos estudado um novo tipo de números: os Números Bi-harmônicos Semiprimos, aqueles números Bi-Harmônicos que se decompõem em produto de dois números primos e sua média Bi-Harmônica destes divisores é um número natural inteiro. Os números bi-harmônicos Semiprimos abrem caminho a outro tipo de números os chamados Cristais, que se conecta com sequências recorrentes lineares e Equações Diofantinas.

O propósito desse trabalho foi definir os números bi-harmônicos, suas propriedades e suas conexões com os números primos, tal como foi mostrado no Teorema Principal. Sem dúvidas estes números abre um leque muito grande de outras definições e relacionamentos, porém não foram abordados aqui pelo fato de minha intenção foram apenas de mostrar que existe um número Bi-Harmônico e que ele é semiprimo.

Referências Bibliográficas

[1] TAVARES, Américo**.** Números harmónicos – racionais mas não inteiros. https://problemasteoremas.wordpress.com/2010/11/24/numeros-harmonicos-racionais-mas-nao-inteiros

[2] WIKIPEDIA. Série harmónica (matemática). https://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_harm%C3%B3nica_(matem%C3%A1tica)

[3] WEISSTEIN, ERIC W. "harmónico". De MathWorld Recursos Web – Um Wolfram http://mathworld.wolfram.com/HarmonicMean.html

[4] PROBST, Roy Wilhelm. Números primos. http://paginapessoal.utfpr.edu.br/rwprobst/formacao-academica/curriculo/primos.pdf

[5] LIMA, José A. F. e FREITAS, Sinval B. PRIMALIDADE: Fundamentos, Testes e Perspectivas. https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12008/JoseAluizioFerreiraLima.pdf

[6] SÁNDOR, József. *On bi-unitary harmonic numbers*. arXiv: 1105.0294v1, 2 May 2011. http://arxiv.org/pdf/1105.0294.pdf

[7] STEWART, James. *Calculo* v.2, 6ª ed. CENGAGE Learning, 2008.

[8] ABRATE, Marcos; BARBERO, Stefano et al. *The Biharmonic Mean*. arXiv: 1601.03081v1, 12 Jan 2016. http://arxiv.org/pdf/1601.03081v1.pdf

[9] OLIVEIRA, Krerley Irraciel M. e FERNANDEZ, Adán J. C. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*, Rio de Janeiro, SBM, 2010.

[10] OYSTEIN, Ore, *On the Averages of the Divisors of a Number*. Amer. Math. Monthly 55, 615–619. (1948).

[11] CARVALHO, R. F, *Números Primos e o Teorema Fundamental da Aritmética no Sexto Ano do Ensino Fundamental*, Dissertação de Mestrado, PROFMAT/IMPA, RJ.