



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI – UFSJ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – DEMAT

GUILHERME AUGUSTO LOPES

O MODELO DINÂMICO DA TEIA DE ARANHA

SÃO JOÃO DEL-REI

2016

GUILHERME AUGUSTO LOPES

O MODELO DINÂMICO DA TEIA DE ARANHA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de São João Del-rei – UFSJ, em cumprimento às exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: José Angel Dávalos Chuquipoma.

SÃO JOÃO DEL-REI

2016

GUILHERME AUGUSTO LOPES

O MODELO DINÂMICO DA TEIA DE ARANHA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de São João Del-rei – UFSJ, em cumprimento às exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: José Angel Dávalos Chuquipoma.

Avaliado em ____ de _____ de 2016.

Professor Dr. Jose Angel Dávalos Chuquipoma

Orientador e Presidente da Banca Examinadora

Professor Dr. Arnulfo Miguel R. Peña

Membro da Banca Examinadora

São João Del-Rei, 25 de novembro de 2016.

Dedico este trabalho a Deus pelo dom da vida e aos meus pais, que sempre estiveram presentes e me apoiaram nos meus estudos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que iluminou o meu caminho durante esta caminhada.

A toda a minha família, em especial aos meus pais: Lazaro e Adilcilene, que me deram todo suporte e incentivo necessário para continuar em frente e minhas irmãs Laira e Amanda.

Um agradecimento especial à minha namorada Luana pela paciência e por estar ao meu lado todo esse tempo, me apoiando e orientando constantemente.

Também gostaria de agradecer meu tio César, por me direcionar na escolha do curso, meus colegas de trabalho Jesus e Shirlei e todas as pessoas que de alguma forma estiveram envolvidos nesta minha jornada e me ajudaram a chegar até aqui.

Não posso deixar de agradecer ao meu professor orientador Dávalos, pela atenção e direcionamento.

Por fim, agradeço à UFSJ pela oportunidade e pelo aprendizado.

RESUMO

O modelo dinâmico da Teia de Aranha é um modelo matemático com aplicações na economia, que permite descrever a formação de preços de um determinado produto com base na lei da Oferta e Demanda, onde a quantidade a ser produzida deve ser escolhida antes de o preço ser observado. Pressupõe-se que as expectativas dos produtores quanto ao preço são baseadas nas observações de preços anteriores. O principal objetivo deste trabalho é demonstrar matematicamente o modelo Teia de Aranha através de equações de diferenças lineares de primeira ordem, onde o tempo é medido em intervalos discretos. Além disso, realizar um estudo crítico dos tipos de flutuações de preços, analisar situações onde o modelo pode ser aplicado de forma satisfatória e por fim avaliar sua eficiência por meio de levantamentos de dados reais.

Palavra Chave: **Teia de Aranha; Equações de diferenças; Oferta e Demanda; Ponto de equilíbrio.**

ABSTRACT

The dynamic cobweb model is a mathematical model with applications in economics, which allows to describe the formation of prices of a given product based on the Law of Supply and Demand, where the quantity to be produced must be chosen before the price is Observed. It is assumed that the expectations of producers on price are based on observations of previous prices. The main objective of this work is to demonstrate mathematically the cobweb model through first order linear equations, where time is measured in discrete intervals, performing a critical study of the types of price fluctuations, analyzing situations where the model can be Applied in a satisfactory way and finally evaluating its efficiency by means of surveys of real data.

Keyword: **Cobweb; Equations of difference; Supply and demand; Break-even point.**

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
CAPÍTULO I – O modelo dinâmico da Teia de Aranha	13
Seção 1.1 – A origem	13
Seção 1.2 – Fundamentação teórica	14
CAPÍTULO II – Fundamentação matemática	17
Seção 2.1 – Equações de Oferta e Demanda no mercado	17
Seção 2.2 – Ponto de equilíbrio e equação de diferenças	18
Seção 2.3 – Exemplo de determinação de preço	22
CAPÍTULO III – Aplicação prática do modelo Teia de Aranha	23
Seção 3.1 – Levantamento de dados.....	23
Seção 3.2 – Equações da oferta e demanda da mandioca.....	24
Seção 3.3 – Diagrama em Teia de Aranha – software Geogebra.....	24
Seção 3.4 – Determinação do preço.....	25
Seção 3.5 – Determinação do preço futuro.....	26
Seção 3.6 – Resultados da pesquisa.....	27
CAPÍTULO IV – Limitações	28
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	30
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	32

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Produção de mandioca no município de Cachoeira de Minas – MG	23
---	----

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ciclo Convergente.....	15
Figura 2 – Ciclo Contínuo	15
Figura 3 – Ciclo Divergente	16
Figura 4 – Preço de equilíbrio convergindo para estabilidade. Elaydi (2005)	20
Figura 5 – Preço de equilíbrio estável. Elaydi (2005)	20
Figura 6 – Preço de equilíbrio instável. Elaydi (2005)	21
Figura 7 – Diagrama Teia de Aranha	25

INTRODUÇÃO

O modelo dinâmico da Teia de Aranha é um modelo matemático com aplicações na economia. Ele explica a formação do preço de um bem com base na lei da Oferta e Demanda, onde a quantidade produzida deve ser escolhida, antes que o preço seja determinado pelo mercado. Pressupõe-se que conhecendo o preço praticado no ano anterior e na expectativa desse preço se manter no ano corrente, calcula-se a quantidade que será colocada no mercado.

Um bom exemplo que retrata essa situação e possibilita a aplicação do modelo é na agricultura, onde os produtores tomam suas decisões de produção com base em experiências passadas.

No setor agropecuário existem períodos de sucessos e fracassos na produção, que estão diretamente ligados a diversos fatores, como as influências climáticas, as incidências de pragas, as doenças imprevistas e principalmente as variações de demanda no mercado interno e externo. Com a finalidade de explicar o comportamento da produção agropecuária foi que alguns teóricos criaram o modelo teia de aranha, mostrando que a quantidade e o preço de alguns produtos podem ou não tender para um equilíbrio.

O presente trabalho tem por principal objetivo apresentar o modelo dinâmico da Teia de Aranha em seus três ciclos, convergente, divergente e contínuo, bem como analisar e discutir a viabilidade de suas aplicações na agricultura através de levantamentos de dados reais.

Tal modelo econômico possibilita ao governo maior controle das flutuações de preços a fim de reduzir o risco de perda de capital dos agricultores na venda da safra, possibilitando ainda, a venda de toda a produção e garantindo uma margem de rentabilidade fixa ao produtor que incentive o replantio, ano após ano, mantendo a oferta destes produtos relativamente constantes.

Para o desenvolvimento do trabalho foram utilizadas pesquisas bibliográficas e em sites de dados estatísticos, como a Companhia Nacional de Abastecimento – Conab e o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. A pesquisa bibliográfica baseou-se em publicações científicas das áreas de economia e matemática. O estudo por meio de sites de dados estatísticos envolveu históricos da produção agropecuária no município de Cachoeira de Minas, estado de Minas

Gerais, e estabeleceu relações entre os preços dos produtos e as quantidades produzidas.

O desenvolvimento do trabalho subdivide-se em quatro capítulos. O primeiro capítulo trata-se da fundamentação teórica do modelo em conformidade com alguns pesquisadores, apresentando-se os três tipos de ciclos de ajustamento de preços e quantidades, que são determinados de acordo com a inclinação das curvas da oferta e demanda. No capítulo II é apresentada a fundamentação matemática do modelo, interpretando e resolvendo por meio de equações de diferenças lineares de 1ª ordem e exemplificando. No terceiro capítulo serão apresentados dados reais para a determinação das equações de oferta e demanda e será construído um diagrama em Teia de Aranha utilizando o software Geogebra para verificar o comportamento das curvas. No Capítulo IV serão apresentadas algumas limitações nas aplicações do modelo Teia de Aranha.

CAPÍTULO I – O modelo dinâmico da Teia de Aranha

Na agricultura, as decisões dos produtores com relação à quantidade a ser produzida são tomadas num período anterior a sua comercialização, pois uma grande variedade de produtos não pode ser armazenada de um ano para outro, ou seja, são produzidos um período antes da sua venda.

Assim, um agricultor decide a quantidade que colocará a venda antes mesmo de conhecer o preço de mercado, entretanto, conhece o preço praticado no ano anterior e com base na expectativa do preço se manter no próximo período calcula-se a quantidade que ofertará no mercado.

A fim de estipular o preço de um determinado produto e fixar as quantidades necessárias para satisfazer o mercado, surgiu uma ferramenta conhecida como Cobweb Model, também conhecida como modelo da Teia de Aranha.

Seção 1.1 – A origem

“*The Cobweb Theorem*” que significa “O Teorema da Teia de Aranha”, também conhecido como Modelo da Teia de Aranha, segundo Ezekiel (1938) foi criado de forma independente por três economistas: Umberto Ricci na Itália, Jan Tinbergen na Holanda e Henry Schultz nos Estados Unidos, todos os trabalhos publicados em alemão, seguindo a mesma idéia básica de realizar ajustes entre preços e produção de acordo com a quantidade de oferta e demanda.

Schultz realizou uma análise bastante simplificada apresentando apenas um exemplo do tipo convergente; a análise de Tinbergen foi mais completa, apresentando exemplos do tipo convergente e divergente; já a análise de Ricci apresentou todos os três tipos básicos: convergente, divergente e contínuo.

Modelos de Teia de Aranha também foram estudados pelos economistas Ronald H. Coase, Wassily Leontief e Nicholas Kaldor. Mas foi a partir da análise de Kaldor (1934) em “*A Classificatory Note on the Determination of Equilibrium*”, que os

estudos destes modelos se fizeram de grande interesse e onde teve origem o nome Cobweb.

Quatro anos mais tarde, em 1938, o economista Mordecai Ezekiel (1938) "*The Cobweb Theorem*" fez um estudo, onde deu ao modelo Teia de Aranha maior popularidade pela forma que foi analisado, através de diagramas mais simplificados e de fácil análise.

Seção 1.2 – Fundamentação teórica

Os modelos de Teia de Aranha podem ser facilmente entendidos seguindo um exemplo usado por Kaldor (1934). Supõe-se que as condições meteorológicas não favoráveis durante um determinado ano faz com que a quantidade ofertada de um determinado produto seja bastante pequena Q_t , com isso temos um excesso de demanda, ou procura pelo produto, fazendo com que os preços sejam elevados P_t . Quando os agricultores perceberem que os preços estão bastante elevados, eles irão plantar mais, a fim de fornecer mais no ano seguinte e conseqüentemente obter mais lucro. No entanto, a oferta estará tão alta no ano seguinte Q_{t+1} que os preços tendem a diminuir para atender a demanda dos consumidores P_{t+1} . Como os preços estão mais baixos, os produtores decidem reduzir sua produção no ano seguinte Q_{t+2} , resultando em preços elevados novamente P_{t+2} . Este processo continuará até que um equilíbrio seja alcançado após vários ciclos.

Segundo Yamaguchi e Araújo (2006) quando o equilíbrio entre a quantidade ofertada e demandada é de fato alcançado, tem-se um **ciclo convergente** (Figura 1), onde a inclinação da curva da oferta é maior do que a inclinação da curva da demanda.

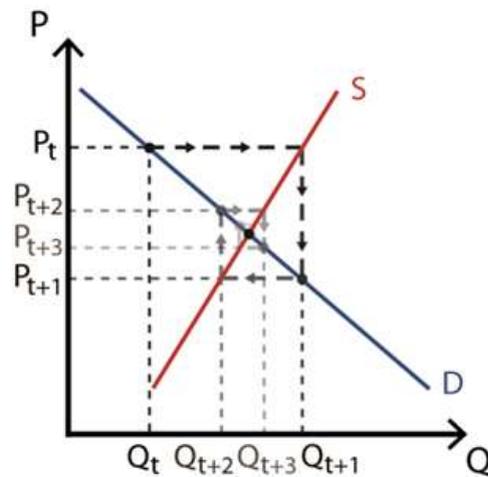


Figura 1 – Ciclo Convergente

Quando as curvas de oferta e demanda do produto apresentar a mesma inclinação, em termos absolutos, tem-se um **ciclo contínuo** (Figura 2).

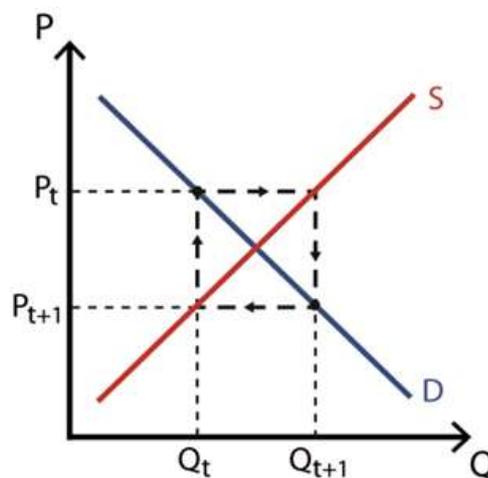


Figura 2 – Ciclo Contínuo

Por último, quando a inclinação da curva da demanda é maior do que a inclinação da curva da oferta tem-se um **ciclo divergente** (Figura 3). Neste caso o preço se afasta cada vez mais do ponto de equilíbrio:

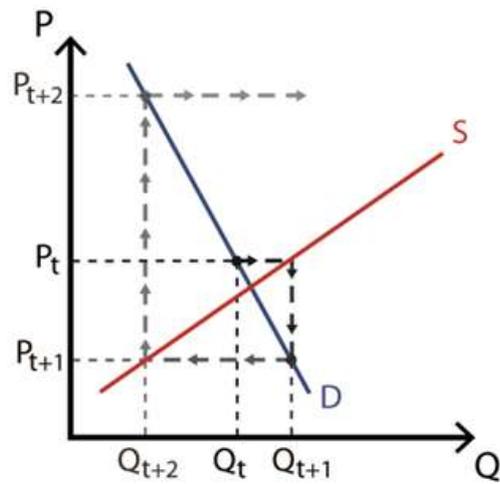


Figura 3 – Ciclo Divergente

Ainda segundo Kaldor (1934) existem outras situações possíveis, que dá-se pelas mudanças na inclinação das curvas, onde pode ocorrer mais de um dos casos acima.

CAPÍTULO II – Fundamentação matemática

Segundo Bassanesi (2000), a economia utiliza um forte amparo matemático para estabelecer teorias relacionadas a equilíbrio de mercado.

Uma forma de demonstrar matematicamente o modelo dinâmico da Teia de Aranha é através das equações de diferenças (ou equações discretas) que permitem descrever sistemas dinâmicos, cuja evolução no tempo é medida em intervalos discretos. Essas equações possuem várias aplicações: na Biologia, na Medicina, na Física e na Economia, podendo-se encontrar detalhes em Elaydi (2005).

Seção 2.1 – Equações de Oferta e Demanda no mercado

Analisando o problema de encontrar um preço justo (preço de equilíbrio) de um determinado produto, é necessário determinar as equações das curvas de oferta e demanda que envolve a quantidade de produtos ofertados pelo produtor, a quantidade demandada pelos clientes e o preço do produto em questão.

De acordo com Fernandes (2015), seja S_n a quantidade de produtos ofertadas no período n , D_n a quantidade de produtos demandada no período n e p_n o preço unitário do produto. Assumindo que se tem um modelo de mercado simples, onde quantidade demandada depende linearmente do preço por unidade, escreve-se:

$$D_n = -ap_n + b \quad (1)$$

em que a e b são constantes reais. A constante a na equação acima determina a inclinação da curva demanda, representa a sensibilidade dos consumidores com relação ao preço. O sinal negativo aparece porque, em geral, os aumentos nos preços implicam em uma diminuição na demanda.

Entretanto, a capacidade do produtor de fornecer o produto depende do preço que praticou no período anterior. Supondo que essa tendência também é linear, ou seja, que:

$$S_n = cp_{n-1} + d \quad (2)$$

onde c e d também são constantes reais. Esta equação é conhecida como curva da oferta, onde o coeficiente de p_{n-1} tem sinal positivo, pois quanto maior é o preço, o produtor tem capacidade de fornecer mais produtos no período seguinte.

Seção 2.2 – Ponto de equilíbrio e equação de diferenças

Tem-se que o preço de equilíbrio ou preço justo de um determinado mercado ocorre quando a quantidade de produto demandada é igual a quantidade ofertada no mesmo período, satisfazendo assim as necessidades dos consumidores, ou seja,

$$D_n = S_n \Leftrightarrow -ap_n + b = cp_{n-1} + d \quad (3)$$

ou ainda,

$$-ap_n = cp_{n-1} + d - b \quad (4)$$

dividindo toda a equação (4) por $-a$, tem-se:

$$p_n = -\frac{c}{a}p_{n-1} + \frac{b-d}{a} \quad (5)$$

sabe-se que uma equação de diferenças linear na variável Y_n , pode ser escrita pela fórmula:

$$Y_n = bY_{n-1} + a \quad (6)$$

onde sua solução geral é dada pela fórmula:

$$Y_n = \left(Y_0 - \frac{a}{1-b}\right)b^n + \frac{a}{1-b} \quad (7)$$

Fazendo $B = -\frac{c}{a}$ e $A = \frac{b-d}{a}$, pode-se escrever a equação (5) em função de p_n como sendo:

$$p_n = Bp_{n-1} + A = f(p_n) \quad (8)$$

Tem-se que a equação (8) é uma equação de diferenças linear de 1ª ordem. Neste caso, o preço de equilíbrio dado por p_e que é o preço que satisfaz a igualdade entre as curvas de oferta e demanda pode ser escrito como:

$$p_n = p_{n-1} = p_e \quad (9)$$

Substituindo p_n e p_{n-1} por p_e na equação (4), tem-se:

$$-ap_e = cp_e + d - b \quad (10)$$

Calculando p_e , tem-se:

$$p_e = \frac{b-d}{a+c} \quad (11)$$

sabe-se que $B = -\frac{c}{a}$ e $A = \frac{b-d}{a}$, então:

$$p_e = \frac{A}{1-B} \quad (12)$$

Neste ponto a quantidade procurada/demandada é exatamente igual a quantidade oferecida/ofertada. Quando o preço está acima do preço de equilíbrio haverá um excesso de oferta, e quando os preços estão abaixo do preço de equilíbrio haverá excesso de demanda. Neste sentido, a razão entre a inclinação das curvas de oferta e procura determina o comportamento da seqüência de preços, que neste caso é representado pela constante B . Assim, têm-se três casos a considerar, conforme a inclinação da curva de preço:

1º. $-1 < B < 0$

2º. $B = -1$

3º. $B < -1$

O estudo desses casos pode ser feito graficamente de forma eficiente utilizando o diagrama da Teia de Aranha, onde de acordo com o comportamento gráfico, pode-se concluir segundo Rodrigues (2013) que:

1º. O preço alterna, mas convergindo para o preço de equilíbrio p_e . Neste caso p_e será estável (Figura 4). Note-se que este caso é equivalente a $-\frac{c}{a} > -1$, ou seja,

$c < a$, que se interpreta como um mercado onde a sensibilidade dos fornecedores ao preço é menor que a dos compradores.

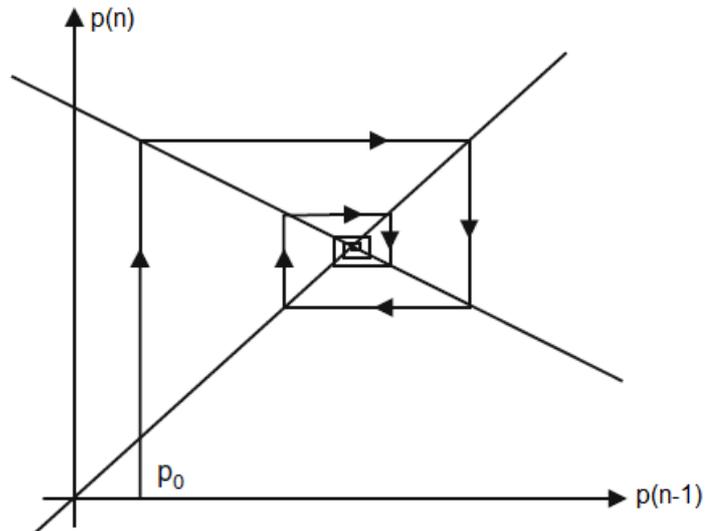


Figura 4 – Preço de equilíbrio convergindo para estabilidade. Elaydi (2005)

2º. Os preços oscilam entre dois valores, já que, tem-se p_0 , logo $p_1 = -p_0 + A$ e $p_2 = p_0$ novamente. Assim, o ponto de equilíbrio é estável (Figura 5). Neste caso a sensibilidade dos fornecedores e compradores ao preço é a mesma.

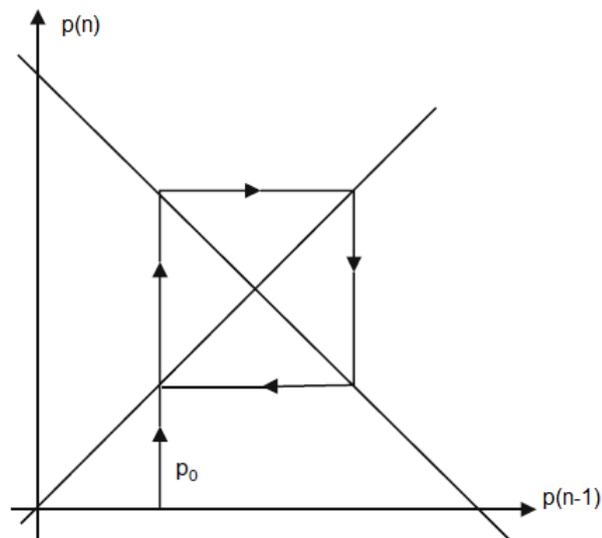


Figura 5 – Preço de equilíbrio estável. Elaydi (2005)

3º. Os preços oscilam indefinidamente à volta do ponto de equilíbrio p_e mas afastando-se progressivamente deste. Neste caso p_e é instável (Figura 6). Tem-se que a sensibilidade ao preço dos fornecedores é maior que a dos compradores.

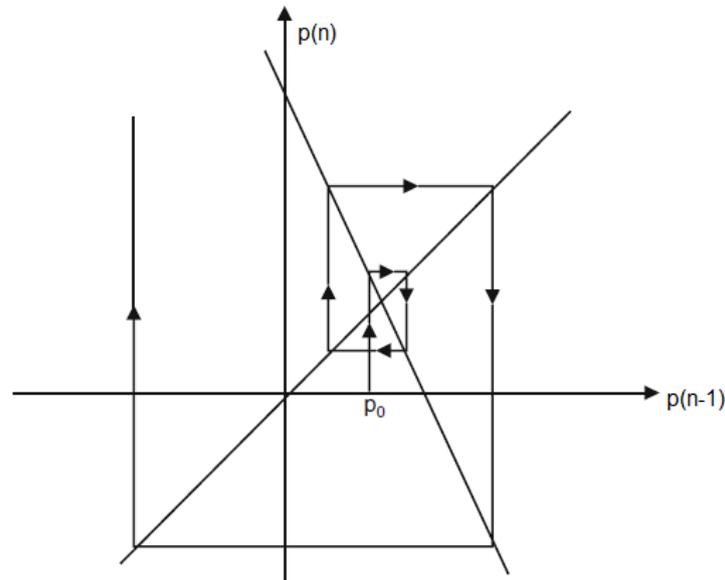


Figura 6 – Preço de equilíbrio instável. Elaydi (2005)

Segundo Elaydi (2005), um ponto de equilíbrio p_e de $p(n) = f(p(n-1))$ é chamado estável se dado um intervalo de p , dado por $\epsilon > 0$, existir outro intervalo $\delta > 0$ tal que $|p_0 - p_e| < \delta$ implica $|f^{n-1}(p_0) - p_e| < \epsilon$ para todo $n > 0$. Se p_e não é estável, então ele é chamado instável.

A solução analítica da equação (8) de diferenças linear de 1ª ordem é calculada de acordo com a equação geral (7), tomando uma condição inicial p_0 tem-se que a solução da equação é dada por:

$$p_n = \left(p_0 - \frac{A}{1-B}\right) B^n + \frac{A}{1-B} \quad (13)$$

Calculando o limite de p_n quando $n \rightarrow +\infty$, chega-se a três conclusões tiradas a partir dos diagramas em Teia de Aranha.

Assim, no 1º caso $\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n) = \frac{A}{1-B} = p_e$; no 2º caso, se n é par $\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n) = p_0$ e se n é ímpar $\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n) = A - p_0$; e no 3º caso p_n não tem limite.

Seção 2.3 – Exemplo de determinação de preço

Considerando as curvas de oferta $S_n = 0,3p_{n-1} - 30$ e demanda $D_n = -0,75p_n + 180$, deseja-se determinar o preço de mercado p_n para qualquer período de tempo, o preço de equilíbrio p_e e a estabilidade da trajetória no tempo, dado o preço inicial $p_0 = 220$.

Para encontrar o preço p_n para qualquer período de tempo, é necessário igualar as curvas da oferta e da demanda, ou seja:

$$-0,75p_n + 180 = 0,3p_{n-1} - 30 \quad (14)$$

dividindo toda a equação por $-0,75$ e usando (13),

$$p_n = -0,4p_{n-1} + 280 = \left(220 - \frac{280}{1+0,4}\right)(-0,4)^n + \frac{280}{1+0,4} \quad (15)$$

pode-se concluir que a equação utilizada para calcular o preço de mercado em qualquer período do tempo é:

$$p_n = 20(-0,4)^n + 200 \quad (16)$$

Para encontrar o preço de equilíbrio é necessário que p_n seja igual a p_{n-1} . Substituindo p_n e p_{n-1} por p_e na equação (14),

$$-0,75p_e + 180 = 0,3p_e - 30 \quad \leftrightarrow \quad -1,05p_e = -210 \quad \leftrightarrow \quad p_e = 200 \quad (17)$$

Observa-se que o valor encontrado ($p_e = 200$) é o segundo termo do lado direito da equação (16).

Para encontrar a estabilidade da trajetória, analisa-se B , e como $B = -0,4$, conclui-se que $-1 < B < 0$, ou seja, a trajetória no tempo p_n oscilará e convergirá para o preço de equilíbrio $p_e = 200$, quando $n \rightarrow \infty$.

CAPÍTULO III – Aplicação prática do modelo Teia de Aranha

Para ilustrar de forma prática o modelo da Teia de Aranha será utilizada como exemplo a produção da lavoura temporária da mandioca, pois é a principal economia agrícola do município de Cachoeira de Minas.

Deseja-se encontrar o preço de equilíbrio, o preço do produto para qualquer período de tempo e a estabilidade da trajetória no tempo do produto agrícola, utilizando o modelo matemático apresentado, a fim de fazer com que o produtor possa se planejar melhor antes de escolher a quantidade a ser produzida.

Seção 3.1 – Levantamento de dados

De acordo com as informações do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, os dados abaixo demonstram a quantidade produzida e o preço da produção, dos anos de 2012 a 2014 no município de Cachoeira de Minas.

**Tabela 1 - Produção de mandioca no município de Cachoeira de Minas – MG
2012 a 2014**

Ano	Quantidade Produzida – mil toneladas	Valor da Produção – mil reais	Preço do Kg. Em R\$
2012	30,80	16.724	0,54
2013	30,80	21.084	0,68
2014	30,84	15.987	0,51

Fonte: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE. Disponível em: <http://cidades.ibge.gov.br/xtras/perfil.php?codmun=310970>.

Seção 3.2 – Equações da oferta e demanda da mandioca

Para encontrar a equação demanda (1) da mandioca, utilizando os dados da tabela (1), sendo D_n a quantidade demandada e p_n o preço do produto no período n , tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0,68a - b = -30,80 \\ 0,51a - b = -30,84 \end{cases} \quad (18)$$

Resolvendo o sistema tem-se $a = 0,235$ e $b = 30,959$. Substituindo $a = 0,235$ e $b = 30,959$ na equação (1), tem-se a equação demanda da mandioca é dada por:

$$D_n = -0,235p_n + 30,959 \quad (19)$$

Para encontrar a equação oferta (2) da mandioca, utilizando os dados da tabela (1), sendo S_n a quantidade ofertada e p_{n-1} o preço do produto no período $n - 1$, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0,54c + d = 30,80 \\ 0,68c + d = 30,84 \end{cases} \quad (20)$$

Resolvendo o sistema tem-se $c = 0,285$ e $d = 30,647$. Substituindo $c = 0,285$ e $d = 30,647$ na equação (2), tem-se que a equação da oferta da mandioca é dada por:

$$S_n = 0,285p_{n-1} + 30,647 \quad (21)$$

Seção 3.3 – Diagrama em Teia de Aranha – software Geogebra

Utilizando o software geogebra para plotar o diagrama Teia de Aranha, chegou-se ao seguinte resultado (Figura 7):

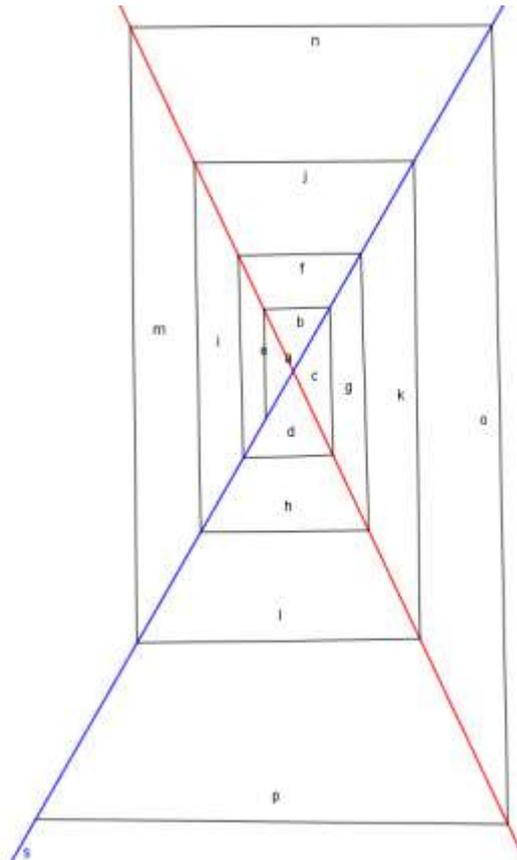


Figura 7 – Diagrama Teia de Aranha

Seção 3.4 – Determinação do preço

Considerando as curvas de oferta $S_n = 0,285p_{n-1} + 30,647$ e demanda $D_n = -0,235p_n + 30,959$ deseja-se determinar o preço de mercado p_n para qualquer período de tempo, o preço de equilíbrio p_e e a estabilidade da trajetória no tempo, dado o preço inicial em 2013 $p_0 = 0,68$.

Para encontrar o preço p_n para qualquer período de tempo, é necessário igualar as curvas da oferta e da demanda, ou seja:

$$-0,235p_n + 30,959 = 0,285p_{n-1} + 30,647 \quad (22)$$

dividindo toda a equação por $-0,235$ e usando (13),

$$p_n = -1,212p_{n-1} + 1,327 = \left(0,68 - \frac{1,327}{1+1,212}\right)(-1,212)^n + \frac{1,327}{1+1,212} \quad (23)$$

pode-se concluir que a equação utilizada para calcular o preço de mercado em qualquer período do tempo é:

$$p_n = 0,08 (-1,212)^n + 0,599 \quad (24)$$

Para encontrar o preço de equilíbrio é necessário que p_n seja igual a p_{n-1} . Substituindo p_n e p_{n-1} por p_e em na equação (22),

$$-0,235p_e + 30,959 = 0,285p_e + 30,647 \leftrightarrow -0,52p_e = -0,312 \leftrightarrow p_e = 0,6 \quad (25)$$

Pode-se observar que o valor encontrado $p_e = 0,6$ que é o segundo termo do lado direito da equação (24).

Para encontrar a estabilidade da trajetória, analisa-se B , e como $B = -1,212$, conclui-se que $B < -1$, ou seja, os preços oscilam indefinidamente à volta do ponto de equilíbrio $p_e = 0,6$, afastando-se progressivamente deste, portanto, o preço será divergente quando $n \rightarrow \infty$.

Seção 3.5 – Determinação do preço futuro

Deseja-se calcular o preço da mandioca para o ano de 2017, visto que os dados estatísticos do IBGE são encontrados somente até o ano de 2014.

Conforme a fórmula (24) apresentada sabe-se que o preço inicial p_0 utilizado na equação geral para encontrar o preço em qualquer período de tempo foi estabelecido em 2013. Com isso, se passaram 4 anos até o ano de 2017. Deseja-se encontrar p_4 .

Substituindo n por 4 em (24) tem-se:

$$p_4 = 0,08 (-1,212)^4 + 0,599 \leftrightarrow p_4 = 0,76 \quad (26)$$

O preço do quilo da mandioca em 2017 será de R\$ 0,76.

Seção 3.6 – Resultados da pesquisa

Verificou-se que, para determinação do preço da mandioca o modelo Teia de Aranha proporcionou um resultado bastante positivo. O preço encontrado está de acordo com o praticado no município. Com isso o modelo mostrou ser uma ferramenta capaz de prever os preços da mandioca para os próximos anos. Porém é difícil garantir que os resultados em longo prazo, serão compatíveis com a realidade.

O diagrama plotado no software Geogebra possibilitou visualizar perfeitamente o ciclo divergente, que se distancia cada vez mais do ponto de equilíbrio.

CAPÍTULO IV – Limitações

Para Ezekiel (1938) o modelo Teia de Aranha somente pode ser aplicado mediante o cumprimento de três condições: (1) onde a produção é completamente determinada pela resposta do produtor ao preço...; (2) onde o tempo necessário a produção requer pelo menos um período inteiro...; e (3) onde o preço é determinado pela oferta disponível (WAUGH, 1964).

Para Yamaguchi e Araújo, a formulação e ajustamento de mercado no modelo da Teia de Aranha, são possíveis somente se atender as seguintes pressuposições:

(a) o produto deve ser produzido dentro de um determinado período de tempo, sendo praticamente impossível efetuar qualquer tipo de alteração que possa afetar de modo significativo o nível da produção; (b) a ausência de estoques significativos do produto, nas mãos dos produtores e/ou intermediários, de forma que isso possa exercer alguma influência relevante nos preços do produto no mercado (os produtos de maior perecibilidade são mais susceptíveis de apresentarem tal comportamento), (c) a existência de um grande número de empresas no setor, porém insuficiente para influenciar as condições de mercado do produto por suas decisões individuais, e (d) a suposição de que os empresários rurais tomam suas decisões acreditando que os preços correntes e os custos de produção não sofrerão mudanças substanciais durante o processo produtivo. (YAMAGUCHI ; ARAÚJO, 2006).

Tendo em vista as limitações de aplicação do modelo Teia de Aranha, pode-se verificar que, os dois primeiros pressupostos estabelecidos por Yamaguchi e Araújo podem não prevalecer, mesmo na produção agropecuária, pois alguns produtos agropecuários podem sim ser armazenados de um período para o outro, bem como também é possível alterar a quantidade de produção, como é o caso da lavoura permanente do café.

Kaldor (1934) expandiu o modelo da Teia de Aranha, para os casos em que existam ajustes contínuos de preços e quantidades. Nesses casos, verificou-se que

o equilíbrio entre preços e quantidades depende das velocidades relativas de ajustes da demanda e da oferta, e não das inclinações relativas dessas duas curvas.

Deste modo, se a velocidade de ajuste for maior do lado da demanda do que do lado da oferta, os movimentos convergirão para um ponto de equilíbrio estável. Por outro lado, se a velocidade for maior do lado da oferta do que do lado da demanda, os movimentos de preços e quantidades não convergirão para um ponto de equilíbrio estável.

De acordo com esta análise pode-se concluir que, como se espera reações mais lentas do lado da oferta do que do lado da demanda e que os casos de completa descontinuidade são raros, a inexistência de um ponto de equilíbrio estável entre preço e quantidade não deverá ser freqüente.

Examinando-se a terceira pressuposição do modelo da Teia de Aranha, em que os produtores estabelecem seus planos, na suposição de que os preços correntes e os custos de produção permanecerão constantes durante o processo produtivo, pode-se constatar que esta também é bastante irrealista. É difícil aceitar que o produtor desconheça completamente as modificações dos preços do produto e dos fatores utilizados no processo produtivo, bem como a direção desses movimentos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com os dados levantados, foi possível verificar que apesar da impossibilidade de aplicação do modelo Teia de Aranha em todos os produtos agrícolas, constatou-se que o modelo pode ser aplicado de forma satisfatória na lavoura de mandioca. Isso foi possível, pois a mandioca é um bem perecível que não pode ser armazenado de um ano para outro, ou seja, toda sua produção deve ser vendida por um preço que os consumidores consigam pagar e que o produtor sintasse motivado a produzir mais nos próximos anos.

Sabe-se que na agricultura podem ocorrer várias instabilidades no mercado ocasionadas por incertezas, ou mesmo por adversidades climáticas, como clima, doenças, entre outras. Para esses casos o modelo dinâmico da Teia de Aranha não possui ferramentas suficientes para determinação de preços e quantidades.

Outra crítica importante ao modelo diz respeito a inexistência de qualquer diferenciação entre métodos para determinação de preços a longo ou a curto prazo. No curto prazo pode-se dizer que foi verificado sucesso na aplicação do modelo, porém em longo prazo é pouco provável que os preços permaneçam seguindo a mesma regra, pois a economia muda constantemente, o que pode levar a erros muito grandes ao se prever um preço futuro em longo prazo utilizando o mesmo método.

Contudo, o objetivo principal do trabalho foi de fato alcançado, o modelo foi demonstrado e um exemplo foi resolvido utilizando dados fictícios onde se calculou o preço de equilíbrio e foi determinada uma fórmula para calcular o preço futuro do produto para qualquer período de tempo. Com os dados reais apresentados foi preciso determinar as curvas de oferta e demanda, antes de realizar os cálculos de determinação de preços, que por sua vez chegou-se a resultados que condiz com a realidade do município de Cachoeira de Minas.

Um modelo matemático pode ser considerado bom ou ruim, simples ou satisfatório, estético ou feio, útil ou inútil, mas seria difícil dizer se é verdadeiro ou falso (Davis e Hersh, 1986), dependendo do objetivo que se deseja alcançar.

Para finalizar podemos dizer que o modelo Teia de Aranha é uma ferramenta muito interessante que possibilitou enxergar o comportamento das curvas de oferta e demanda, por meio de seu diagrama e por se tratar de um modelo de fácil interpretação pode ser utilizado por professores nas aulas de matemática para ensinar economia até mesmo no ensino médio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

TAMARI, B. Cobweb model in the Housing Sector of Israel 1960 – 2010. **Economics Quarterly**, 1981. Disponível em: <www.bentamari.com/ecometry>. Acesso em: 10 Mar. 2016.

EZEKIEL, M. The Cobweb Theorem. **The Quarterly Journal of Economics**, Oxford University Press, vol. 52, No. 2, pp. 255-280, Feb. 1938. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1881734>>. Acesso em: 07 Mai. 2012.

ARIFOVIC, J. Genetic algorithm learning and the cobweb model. **Journal of Economic Dynamics and Control**, North-Holland, p. 3-28, 1994. Disponível em: <<http://web.uvic.ca/~mingkang/econ353/project/Arifovic94.pdf>>. Acesso em: 01 Mar. 2016.

ELAYDI, S. **An Introduction to Difference Equations**. 3 ed. Texas: Springer, 2005.

SING, V. P, **Sistem Modeling and Simulation**. Ansari Road, Daryaganj, New Delhi: New Age International Publishers, 2009. Disponível em: www.newagepublishers.com. Acesso em: 3 abr. 2016.

VAN DE VELDER. H. Chapter 2 Cobweb Model, **Amsterdam School of Economics Research Institute**, Amsterdam, 2001. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11245/2.17643>>. Acesso em: 10 mar. 2016.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**, [S.I.]: Virtual Books, 2000. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/256007243>. Acesso em: 10 mar. 2016.

HELLER, C. A economia de curto prazo de Richard Kahn e os primórdios da teoria do oligólio: uma contribuição a historia do pensamento econômico contemporâneo. **Revista de Economia Política**, v. 18, n° 2, p. 49-65, abril-junho, 1998.

FERNANDES, F. R. **Equações de diferenças de 1ª ordem e suas aplicações**. 2015. 104 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

RODRIGUES, L. F. C. **Estabilidade de Equações de Diferenças Quase Lineares**. 2013. 105 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro – SP, 2013.

MORAIS, L. **Equações de Diferenças, Caos e Fractais**. 2014. 117 f. Dissertação (mestrado profissional) – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis – SC, 2014.

PALMA, A. A. **Análise empírica da formação de expectativa de inflação no Brasil**. 2007. 111 f. Dissertação (Mestrado em Economia) – Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre – RS, 2007.

CAGAN, P. The monetary dynamics of hyper-inflation. In: FRIEDMAN, M. (Ed.). **Studies in the quantity theory of money**, Chicago: University of Chicago Press, 1956.

EVANS, G.; HONKAPOHJA, S. **Learning and expectations in macroeconomics**. Princeton: Princeton University Press, 2001.

FRIEDMAN, M. **Theory of the consumption function**. Princeton: Princeton University Press, 1957.

NERLOVE, M. **The dynamics of supply: estimation of the farmers' response to price**. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1958.

MUTH, J. Rational Expectations and the theory of price movements. **Econométrica**, v. 29, n. 3, p. 315-335, 1961.

SANTOS, N. C. **A hipótese das expectativas racionais: teoria e teses**. 2003. Dissertação (Mestrado Profissional em Economia) – Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

PAGNONCELLI, B. K.; PALMEIRA, C. F. B.. **Dinâmica discreta aplicada a economia**. III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2006.

DOWLING, E. T. **Matemática aplicada à economia e administração**. São Paulo: Mc Graw-Hill do Brasil, 1981.

YAMAGUCHI, L. C. T.; ARAÚJO, L. F. de O. Dinâmica de mercado com ajustamento defasado. **Revista Eletrônica de Economia**. 2006. Disponível em: <http://intranet.viannajr.edu.br/revista/eco/doc/artigo_70005.pdf>. Acesso em: 27 de setembro. 2016