

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI**  
**LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**JARBAS ANTÔNIO FERREIRA**

**MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO**

**SÃO JOÃO DEL REI – MG**

**2016**

**JARBAS ANTÔNIO FERREIRA**

## **MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO**

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática a Distância, da Universidade Federal de São João Del-Rei.

Orientador: Prof. Dr. Arnulfo Miguel Rodriguez Peña

**SÃO JOÃO DEL REI – MG**

**2016**

**JARBAS ANTÔNIO FERREIRA**

## **MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO**

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática a Distância, da Universidade Federal de São João Del-Rei.

Os componentes da banca de avaliação, abaixo identificados, consideram este trabalho aprovado.

### **BANCA EXAMINADORA**

---

**Prof.º Dr. Arnulfo Miguel Rodriguez Penã – UFSJ**

---

**Prof.º Dr. Marco Antônio Claret de Castro – UFSJ**

**Data da aprovação:** São João del-Rei, 27 de novembro de 2016.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a Deus por me proporcionar saúde e dedicação na conclusão deste trabalho.

Agradeço a minha família por estar sempre presente me apoiando e por ser o motivo de minha luta.

Agradeço a todo o corpo docente, aos tutores presenciais e a distância e ao meu orientador Prof. Dr. Arnulfo Miguel Rodriguez Penã pelo apoio prestado.

Agradeço à Universidade Federal de São João Del Rei e ao Departamento de Matemática e Estatística, pela oportunidade de realizar o curso.

Enfim, agradeço a todos que de forma direta ou indiretamente contribuíram na conclusão desta etapa tão importante para minha vida.

# MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO

JARBAS ANTÔNIO FERREIRA

## RESUMO

Neste trabalho irei tratar de alguns conceitos de Integração Aproximada. Antes de abordar o assunto é importante saber que integração indefinida, consiste no processo inverso da derivação, enquanto a integral definida, ou seja, a integral propriamente dita, e sua relação que nada mais é que determinar a área de figuras planas. Posteriormente veremos o Teorema Fundamental do Cálculo, considerado essencial em todo Cálculo Diferencial e Integral, por estabelecer a ligação entre as operações de derivação e integração. Por fim serão abordadas técnicas de calcular integral pelo método de aproximação por áreas, através do método do ponto médio, método dos trapézios e método de Simpson, bem como seus erros de cálculo.

Palavra chave: Ponto Médio, Simpson, Trapézios.

## **ABSTRACT**

This work will address some concepts Approximate Integration. Before addressing the issue it is important to know that indefinite integration is the reverse process of derivation, while the definite integral, ie the integral itself, and their relationship is nothing more than determine the area of plane figures. Then we'll see Fundamental theorem of Calculus, considered essential in all Differential and Integral Calculus, to establish the link between derivation and integration operations. Finally they will be discussed techniques to calculate the integral areas by approximation method, using the midpoint method trapezoid method and Simpson method, as well as their calculation errors.

Keyword: Midpoint, Simpson, Trapezoid.

## Sumário

INTRODUÇÃO.....	8
CAPÍTULO 1 - INTEGRAÇÃO .....	9
1.1 Integração aproximada .....	9
1.2 Integral definida .....	11
CAPÍTULO 2: MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO .....	13
2.1 Método do Ponto Médio .....	13
2.1.1 Erro da aproximação:.....	14
2.2- Método dos Trapézios .....	15
2.3 Método de Simpson.....	19
2.3.1 Limite de Erro para a Regra de Simpson .....	22
CAPÍTULO 3 – ELEMENTOS DA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA .....	25
<b>3.1: Método dos trapézios segundo Richard Burdem, J Douglas Faires</b> .....	26
3.2 Regra de Simpson .....	28
3.3 Medição de precisão .....	31
3.4 Fórmulas Fechadas de Newton-Cotes .....	32
3.5 Fórmulas Abertas de Newton-Cotes.....	34
4.0 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	37
5.0 REFERÊNCIAS:.....	38

## INTRODUÇÃO

A aplicação de Métodos de Integração que veremos neste trabalho, método do ponto médio, método dos trapézios e método de Simpson, foi baseada nos estudos da integral de Riemann.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz, Reino de Hanôver, 17 de Setembro de 1826 — Selasca, Verbania, 20 de Julho de 1866) foi um matemático alemão, com contribuições fundamentais para a análise e a geometria diferencial. [...] Obteve o doutorado na Universidade de Göttingen, com uma tese no campo da teoria das funções complexas. [...] (Repositório Wikipédia, 2016.)

A integral de Riemann, criada por Bernhard Riemann, foi a primeira definição rigorosa de uma integral de uma função em um intervalo. Enquanto a integral de Riemann é inadequada para muitos propósitos teóricos, é uma das definições mais simples de integral. Grosseiramente falando, a integral de Riemann é o limite da soma de Riemann com uma função de partição que se afine cada vez mais.

A partir da definição de integral de Riemann são deduzidos outros métodos de aproximação para calcular certas integrais definidas por métodos de aproximação como o método de aproximação pela extremidade esquerda e aproximação pela extremidade direita, assim como os métodos de aproximação do ponto meio e do trapézio, que serão estudadas neste trabalho (Em geral a aproximação é melhor quando a partição é mais fina).

Outros dos métodos que serão estudados neste trabalho é o método de aproximação de Simpson.

É importante sabermos que precisamos recorrer aos métodos numéricos de integração em algumas situações, tais como:

- Quando não for possível determinar uma integral de uma função através do Teorema Fundamental do Cálculo, por exemplo, as integrais elípticas.
- Quando não se tem uma função a ser integrada, e sim dados coletados, ou por meio de leituras de instrumentos.
- Podemos também recorrer aos métodos de integração quando não conseguimos determinar uma primitiva, devido sua complexidade necessitar de um grande esforço computacional.



## CAPÍTULO 1 - INTEGRAÇÃO

### 1.1 Integração aproximada

Segundo Stewart James, em seu livro de cálculo, existe algumas situações especiais que se torna necessário o uso de métodos de integração aproximada.

Existem duas situações nas quais é impossível encontrar o valor exato de uma integral definida.

A primeira situação surge do fato de que, para calcularmos  $\int_a^b f(x) dx$  usando o Teorema Fundamental do Cálculo, precisamos conhecer uma primitiva de  $f$ . Algumas vezes, no entanto, é difícil, ou mesmo impossível, encontrar uma primitiva. Por exemplo, é impossível calcular as seguintes integrais exatamente:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3} dx$$

A segunda situação surge quando a função é determinada por um experimento científico, por meio de leituras de instrumentos ou dados coletados. Pode não haver uma fórmula para a função.

Em ambos os casos precisamos encontrar valores aproximados para as integrais definidas. Já conhecemos um método desse tipo. Lembre-se de que a integral definida é obtida como um limite das somas de Riemann; assim, qualquer soma de Riemann pode ser usada como uma aproximação à integral: se dividirmos  $[a, b]$  por  $n$  subintervalos de comprimento igual  $\Delta x = (b-a)/n$ , então teremos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

Onde  $x_i^*$  é um ponto qualquer no  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Se  $x_i^*$  for escolhido como extremidade esquerda do intervalo, então  $x_i^* = x_{i-1}$  e teremos:

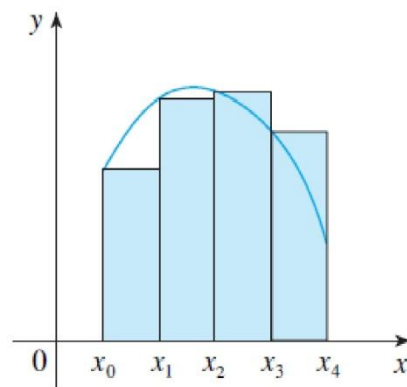
$$(1) \int_a^b f(x) dx \approx L_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x$$

Se  $f(x) \geq 0$ , então a integral representa uma área e representa uma aproximação dessa área pelos retângulos mostrados na Figura 1(a). Se escolhermos  $x_i^*$  como a extremidade direita, então  $x_i^* = x_i$  e teremos:

$$(2) \int_a^b f(x) dx \approx R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

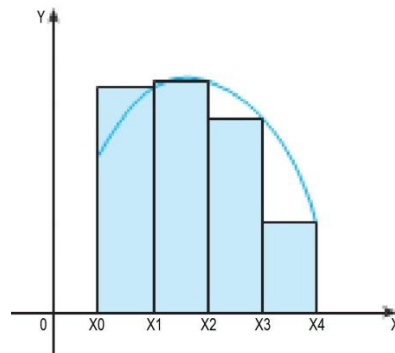
[Veja a Figura 1(b).] As aproximações  $L_n$  e  $R_n$  definidas pelas Equações 1 e 2 são chamadas de **aproximação pela extremidade esquerda** e **aproximação pela extremidade direita**, respectivamente. (STEWART, J., 2013, p. 458)

Figura 1(a) – Aproximação pela extremidade esquerda



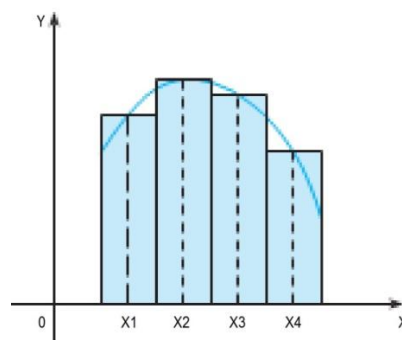
Fonte: STEWART, 2013, p. 458.

Figura 1(b) – Aproximação pela extremidade direita



Fonte: STEWART, 2013, p. 458.

Figura 1(c) – Aproximação pelo ponto meio

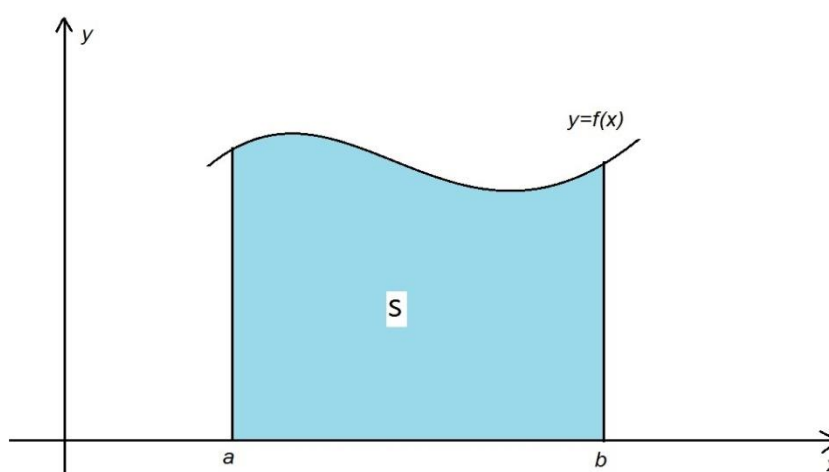


Fonte: STEWART, 2013, p. 458.

## 1.2 Integral definida

De acordo com o livro de Diva Marília Flemming, Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração, 6ª Edição, Revista e Ampliada: A integral definida nasceu “com a formalização matemática na tentativa de calcular os problemas de área e problemas físicos”. Sendo assim, para calcular a área de uma região plana qualquer, delimitada pelo gráfico de uma função contínua não negativa, pelo eixo dos  $x$  e por duas retas  $x = a$  e  $x = b$ , (ver figura 2).

Figura 2



Fonte: FLEMMING, 2006, p. 257

Para isso fazemos uma partição do intervalo  $[a, b]$ , ou seja, dividimos o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos, escolhendo os pontos:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

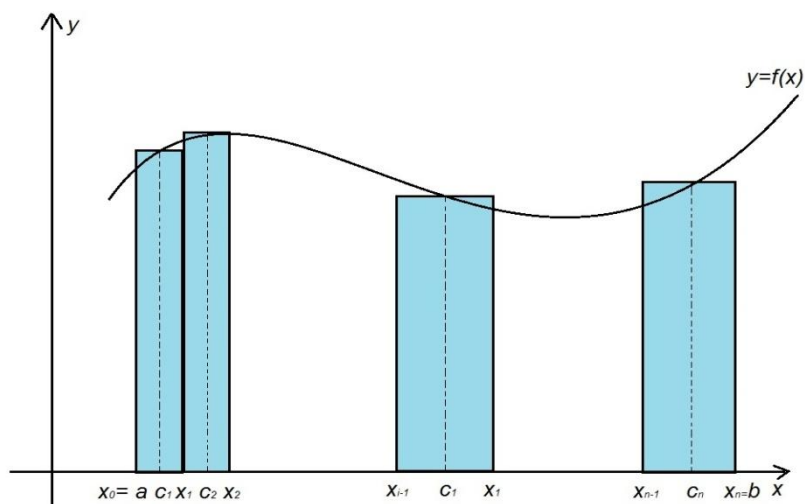
Seja  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  o comprimento do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Em cada um destes intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  escolhemos um ponto qualquer  $c_i$ .

Para cada  $i, i = 1, \dots, n$ , construímos um retângulo de base  $\Delta x_i$  e altura  $f(c_i)$ . (FLEMMING, D., M., 2006, p, 257)

(ver figura 3)

Figura 3



Fonte: FLEMMING, 2006, p. 257

### Definição:

Ainda segundo FLEMMING (2006, p. 260): “Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $[a, b]$  e seja  $P$  uma partição qualquer de  $[a, b]$ . A integral definida de  $f$  de  $a$  até  $b$ , denotada por”:

$\int_a^b f(x)dx$ , é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

Onde  $c_i$  é a base

$\Delta x_i$  é a altura

Considerando que o limite do 2º membro exista.

Se  $\int_a^b f(x)dx$ , existe, dizemos que  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .

Na notação  $\int_a^b f(x)dx$ , os números  $a$  e  $b$  são chamados de *limites de integração* ( $a$  = limite inferior e  $b$  = limite superior)

Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , então:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds, \text{ Nota-se que podemos usar qualquer}$$

símbolo para representar a variável independente.

Quando  $f$  é contínua e não negativa em  $[a, b]$ , a definição da integral definida coincide com a definição da área. Sendo assim a integral definida  $\int_a^b f(x)dx$  é a área da região sob o gráfico de  $f$  de  $a$  até  $b$ .

OBS: O intervalo  $[a, b]$  implica em dizer que  $a < b$ . Assim, nesta definição, não levamos em conta os casos em que o limite inferior é maior que o limite superior.

**Definição:**

a) Se  $a > b$ , então:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \text{ ' caso exista a integral a direita}$$

b) se  $a = b$  e  $f(a)$  existe, então:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

É importantíssimo saber quais as funções são integráveis. A classe das funções contínuas representa uma ampla classe de funções usadas no Cálculo, e podem ser garantidas pelo teorema a seguir:

**Teorema:**

Se  $f$  é contínua sobre  $[a, b]$ , então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .

## CAPÍTULO 2: MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO

### 2.1 Método do Ponto Médio

O método do ponto médio tem por finalidade, deduzir de forma simples e

eficiente o método dos retângulos. Considerando um intervalo  $[a, b]$  e dividimos por  $n$

intervalos de comprimento igual a  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , considere o ponto médio

$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$  de cada um dos subintervalos  $[x_i, x_{i+1}]$  na subdivisão.

Podemos aproximar a integral  $M_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$  por  $\Delta x f(\bar{x}_i)$  e a integral no

intervalo  $[a, b]$  será dada por:  $\int_a^b f(x) dx = M = \sum_{i=1}^n M_i \approx \sum_{i=1}^n \Delta x f(\bar{x}_i) = \Delta x \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)$

### Exemplo 1:

Aplique a regra do ponto médio com  $n = 5$  para aproximar  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ .

Solução: Podemos observar que se as extremidades dos cinco subintervalos são  $(1, 1,2, 1,4, 1,6, 1,8, 2)$ , por sua vez os pontos médios serão  $(1,1, 1,3, 1,5, 1,7, 1,9)$  e o

comprimento do subintervalo será dado por:  $\Delta x = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$ , de modo que a regra do

ponto médio fornece:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx \Delta x [f(1,1) + f(1,3) + f(1,5) + f(1,7) + f(1,9)] \\ &= \frac{1}{5} \left( \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,7} + \frac{1}{1,9} \right) \\ &\approx 0,691908 \end{aligned}$$

#### 2.1.1 Erro da aproximação:

O erro da aproximação da regra do ponto médio será dado por:

$$|E_M| \leq \frac{k(b-a)^3}{24n^2}, \text{ onde } k \text{ é a constante tal que } |f''(x)| \leq k \text{ no intervalo } [a, b].$$

Por exemplo:  $f(x) = \frac{1}{x}$ , então  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  e  $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ . Sabendo-se

que  $1 \leq x \leq 2$ , temos que  $\frac{1}{x} \leq 1$ , logo:  $|f'''(x)| = \left| \frac{2}{x^3} \right| \leq \frac{2}{1^3} = 2$ .

Assim,  $k = 2$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$  e  $n = 5$ , aplicando a fórmula, teremos:

$$|E_M| \leq \frac{2(2-1)^3}{24.5^2} = \frac{1}{300} \approx 0,003334$$

Obs: Este é um modelo de fórmula aberta de Newton-Cotes, à qual recebe este nome em homenagem a Isaac Newton e Roger Cotes. Tal fórmula consiste na utilização apenas dos valores do intervalo aberto da aproximação, ou seja, os valores das extremidades não são utilizados.

## 2.2- Método dos Trapézios

Segundo James Stewart (2013, p. 459): “A razão para o nome regra dos trapézios pode ser vista na Figura 4, que ilustra o caso com  $f(x) \geq 0$  e  $n = 4$ . A área do trapézio que está acima do  $i$ -ésimo subintervalo é”:

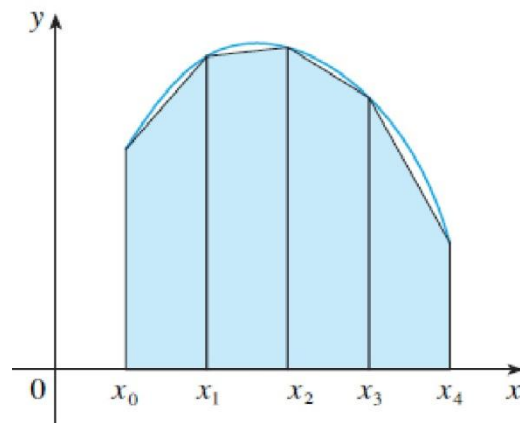
$$\Delta x \left( \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right) = \frac{\Delta x}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

e adicionando as áreas de todos os trapézios, teremos o lado direito da regra dos trapézios que será dado pela fórmula:

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde  $\Delta x = (b-a)/n$  e  $x_i = a + i\Delta x$ .

Figura 4



Fonte: STEWART, 2013, p. 459.

**Exemplo 2:**

Use a regra dos trapézios com  $n = 5$  para aproximar a integral  $\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right) dx$

Solução:

Temos que  $n = 5$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$  e  $\Delta x = \left(\frac{2-1}{5}\right) = 0,2$  sendo assim a regra dos

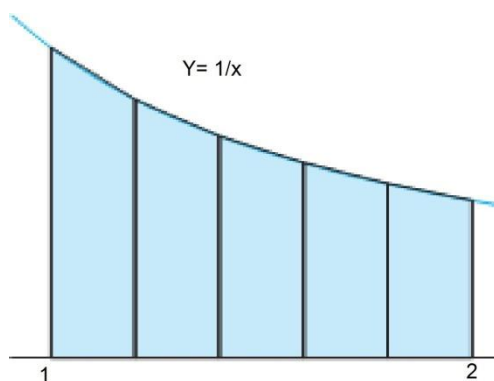
trapézios resultará em:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{x} dx &\approx T_5 = \frac{0,2}{2} [f(1) + 2f(1,2) + 2f(1,4) + 2f(1,6) + 2f(1,8) + f(2)] \\ &= 0,1 \left( \frac{1}{1} + \frac{2}{1,2} + \frac{2}{1,4} + \frac{2}{1,6} + \frac{2}{1,8} + \frac{1}{2} \right) \approx 0,695635 \end{aligned}$$

Veja a representação desta aproximação na figura 5:



Figura 5



Fonte: STEWART, 2013, p. 459.

De acordo com os exemplos 1 e 2 podemos perceber o quão precisas são as aproximações através das regras do ponto médio e trapézio, pois de acordo com o teorema fundamental do cálculo temos que:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \dots \ln(x) \Big|_1^2 = \ln(2) = 0,693147 \dots$$

Para tornar uma aproximação exata fazemos a adição do erro à quantidade encontrada na aproximação. Neste caso percebemos que os erros nas aproximações das regras do ponto médio e trapézio são respectivamente:

$$\left| \frac{0,693147 - 0,691908}{0,693147} \right| \approx 0,001787 \text{ e } \left| \frac{0,693147 - 0,65635}{0,693147} \right| \approx 0,003589$$

De modo geral temos:

$$E_M \approx \frac{\int_a^b f(x) dx - M_n}{\int_a^b f(x) dx} \text{ e } E_T \approx \frac{\int_a^b f(x) dx - T_n}{\int_a^b f(x) dx}$$

Veja nas Tabelas 1 e 2, que mostram os resultados de cálculos parecidos com os exemplos 1 e 2 com  $n = 5, 10$  e  $20$  e para aproximações pelas extremidades esquerda e direita, assim como para as regras do ponto médio e trapézios.

Tabela 1

n	Ln	Rn	Mn	Tn
5	0,745635	0,645635	0,691908	0,695635
10	0,718771	0,668771	0,692835	0,693771
20	0,705803	0,680803	0,693069	0,693303

Fonte: STEWART, 2013, p. 460.

Tabela 2

N	Ln	En	Em	Et
5	- 0,052488	0,047512	0,001239	- 0,002488
10	- 0,025624	0,024376	0,000312	- 0,000624
20	- 0,012656	0,012344	0,000078	- 0,000156

Fonte: STEWART, 2013, p. 460.

### Exemplo 3:

- a) Usando a regra do ponto médio com  $n = 10$  aproxime a integral  $\int_0^1 e^{x^2} dx$ .
- b) Encontre um limite superior para o erro envolvido nessa aproximação.

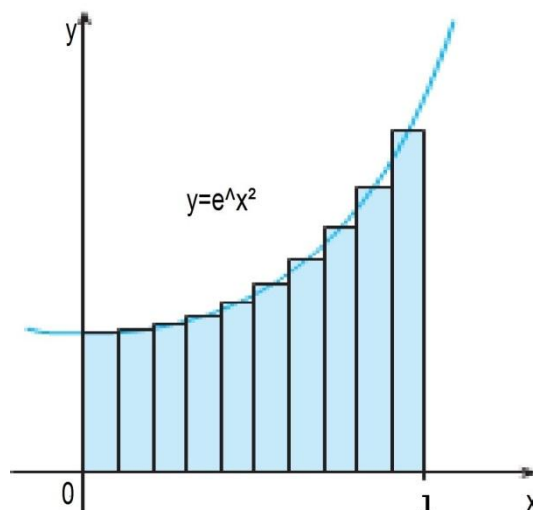
Solução:

- a) Temos que  $a = 0$ ,  $b = 1$ , e  $n = 10$ , a regra do ponto médio resulta em

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{x^2} dx &\approx \Delta x [f(0,05) + f(0,15) + \dots + f(0,85) + f(0,95)] \\ &= 0,1 [e^{0,0025} + e^{0,0225} + e^{0,0625} + e^{0,1225} + e^{0,2025} + e^{0,3025} + e^{0,4225} + e^{0,5625} + e^{0,7225} + e^{0,9025}] \\ &\approx 1,460393 \end{aligned}$$

Essa ilustração pode ser vista na figura 6.

Figura 6



Fonte: STEWART, 2013, p. 462.

b) Como  $f(x) = e^{x^2}$ , temos  $f'(x) = 2xe^{x^2}$  e  $f''(x) = (2+4x^2)e^{x^2}$ .

Além disso, como  $0 \leq x \leq 1$ , temos  $x^2 \leq 1$  e assim:

$$0 \leq f''(x) = (2+4x^2)e^{x^2} \leq 6e$$

Tomando  $k = 6e$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ . e  $n = 10$  na estimativa de erro, vemos que um limite superior para o erro é:

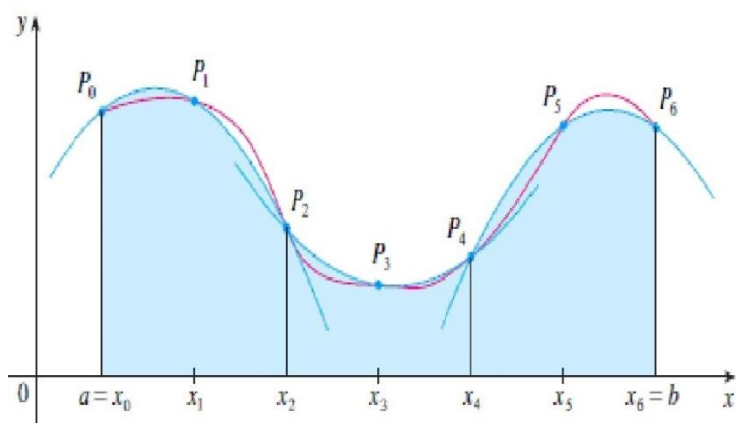
$$\frac{6e(1)^3}{24(10)^2} = \frac{e}{400} \approx 0,007$$

### 2.3 Método de Simpson

Diferente dos métodos do ponto médio e dos trapézios, o método do Simpson segundo Stewart, consiste no uso de parábolas no lugar de segmentos de reta para aproximar uma curva. Antes fazíamos a divisão do intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos com o mesmo comprimento  $e$ , sendo que  $n$  é um número par. Então em cada par consecutivo de intervalos, aproximamos a curva  $y = f(x) \geq 0$  por uma parábola conforma mostrado na figura 7. Se  $y_i = f(x_i)$ , então  $P_i(x_i, y_i)$  é o ponto na curva acima de  $x_i$ . Uma parábola típica passa por três pontos consecutivos,  $P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$ .

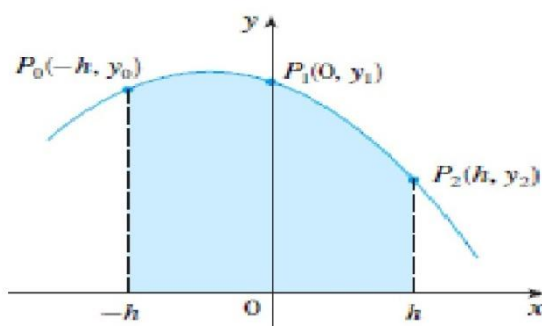
**Thomas Simpson**, o pai era um tecelão. Thomas recebeu pouca educação formal. Ele não frequentou a escola em Market Bosworth por um tempo, mas o seu primeiro emprego foi como um tecelão. Ele aprendeu sozinho a matemática, algo que não era raro que os tecelões naquele tempo, como veremos a seguir. Ele se afastou de sua cidade natal para assumir um cargo como professor em Nuneaton, Warwickshire. De cerca de 1725, quando Simpson tinha quinze anos, até por volta de 1733, ele lecionou matemática em Nuneaton. (Repositório [apprendre-math.info](http://apprendre-math.info).)

Figura 7



Fonte: STEWART, 2013, p. 462.

Figura 8



Fonte: STEWART, 2013, p. 462.

Podemos tornar os cálculos mais simples, em primeiro lugar, considerando  $x_0 = -h$ ,  $x_i = 0$  e  $x_2 = h$ , de acordo com a figura 8. Sendo assim a equação da parábola que passa pelos pontos  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  da fórmula  $y = Ax^2 + Bx + C$ , e assim a área sob a parábola de  $x_0 = -h$  até  $x = h$  é:

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C)dx &= 2 \int_0^h (Ax^2 + C)dx \\
&= 2 \left[ A \frac{x^3}{3} + Cx \right]_0^h \\
&= 2 \left( A \frac{h^3}{3} + Ch \right) = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C)
\end{aligned}$$

Observando que a parábola passa por  $P_0(-h, y_0)$ ,  $P_1(0, y_1)$  e  $P_2(h, y_2)$ , temos:

$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C$$

$$y_1 = C$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

$$\text{Portanto, } y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

Sendo assim a área da parábola pode ser reescrita como:

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Observe que podemos mover essa parábola horizontalmente e não mudamos a área sob ela. Isso ocorre pelo fato de que a área sob a parábola por  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  de  $x = x_0$  a  $x = x_2$  na figura 7 ainda é:

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Do mesmo modo, a área sob a parábola por  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  de  $x = x_2$  para  $x = x_4$  é:

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Fazendo o cálculo das áreas sob todas as parábolas dessa forma e adicionado os resultados obteremos:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\
&= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)
\end{aligned}$$

Finalmente, após deduzir a aproximação considerando o caso em que  $f(x) \geq 0$ , temos a aproximação razoável para qualquer função contínua  $f$  e é chamado de regra de Simpson, em homenagem ao matemático de origem inglesa Thomas Simpson (1710 - 1761). Podemos observar o padrão dos coeficientes: 1, 4, 2, 4, 2, . . . , 4, 2, 1.

**Exemplo 4:**

Usando a regra de Simpson com  $n = 10$  para aproximar  $\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right) dx$

Solução:

$$\text{Calculando } \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \\ n = 10 \\ \Delta x = 0,1 \end{cases}$$

Pela regra de Simpson teremos:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} dx &\approx S_{10} \\ &= \frac{\Delta x}{3} [f(1) + 4f(1,1) + 2f(1,2) + 4f(1,3) + \dots + 2f(1,8) + 4f(1,9) + f(2)] \\ &= \frac{0,1}{3} \left( \frac{1}{1} + \frac{4}{1,1} + \frac{2}{1,2} + \frac{4}{1,3} + \frac{2}{1,4} + \frac{4}{1,5} + \frac{2}{1,6} + \frac{4}{1,7} + \frac{2}{1,8} + \frac{4}{1,9} + \frac{1}{2} \right) \\ &\approx 0,693150 \end{aligned}$$

Podemos observar que ao utilizar a regra de Simpson, encontramos um valor ( $S_{10} \approx 0,693150$ ) da aproximação muito mais próximo do valor do cálculo real da integral ( $\ln(2) \approx 0,693147$ ). Enquanto que na aproximação pela regra dos trapézios encontramos ( $T_{10} \approx 0,693771$ ) e pela regra do ponto médio ( $M_{10} \approx 0,692835$ )

**2.3.1 Limite de Erro para a Regra de Simpson**

Suponhamos que  $|f^{(4)}(x)| \leq K$  para  $a \leq x \leq b$ . Se  $E_s$  é o erro envolvido no uso da regra de Simpson, então:

$$|E_s| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

**Exemplo 5:**

Usando a regra de Simpson com  $n = 10$ , aproxime a integral  $\int_0^1 e^{x^2} dx \approx S_{10}$  e estime o erro envolvido nessa aproximação.

Solução:

$$\text{Temos que: } \begin{cases} f(x) = e^{x^2} \\ n = 10 \\ \Delta x = 0,1 \end{cases}$$

Aplicando a regra:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{x^2} dx &\approx \frac{\Delta x}{3} [f(0) + 4f(0,1) + 2f(0,2) + \dots + 2f(0,8) + 4f(0,9) + f(1)] \\ &\approx \frac{0,1}{3} \left[ e^0 + 4e^{0,01} + 2e^{0,04} + 4e^{0,09} + 2e^{0,16} + 4e^{0,25} + \right. \\ &\quad \left. + 2e^{0,36} + 4e^{0,39} + 2e^{0,64} + 4e^{0,81} + e^1 \right] \\ &\approx 1,462681 \end{aligned}$$

Para o cálculo do erro, calculemos a quarta derivada de  $f(x) = e^{x^2}$  que será:

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2} \text{ e assim, como } 0 \leq x \leq 1 \text{ temos:}$$

$$0 \leq f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^1 = 76e$$

Desse modo, colocando  $K = 76e$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$  e  $n = 10$ , vemos que o

$$\text{erro é no máximo } \frac{76e(1)^5}{180(10)^4} \approx 0,000115.$$

### Exercícios:

**1- (STEWART, 2013, p, 467) Use a regra dos trapézios com  $n = 10$  subintervalos para aproximar a integral dada. Feito isso, calcule o erro real da aproximação.**

$$\int_1^2 \sqrt{x^3 - 1} dx$$

### Solução:

Temos que  $n = 10$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$  e  $\Delta x = \left(\frac{2-1}{10}\right) = 0,1$  sendo assim a regra dos

trapézios resultará em:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{x^3 - 1} dx &\approx T_{10} = \frac{0,1}{2} \left[ f(1) + 2 \left( f(1,1) + f(1,2) + f(1,3) + f(1,4) + f(1,5) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f(1,6) + f(1,7) + f(1,8) + f(1,9) + f(2) \right) \right] \\ &\approx 0,05 \left[ 0 + 1,1506 + 1,7065 + 2,1881 + 2,6412 + 3,0822 + \right. \\ &\quad \left. + 3,5190 + 3,9562 + 4,3964 + 4,8410 + 2,6457 \right] \approx 1,506345 \end{aligned}$$

O valor do erro relativo será dado por:

$$\left| \frac{1,51593 - 1,506345}{1,51593} \right| \approx 0,006323$$

**2- Use a regra do ponto médio com  $n = 8$  subintervalos para aproximar a integral dada. Feito isso, calcule o erro real da aproximação.**

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1+x^2} dx$$

**Solução:**

Podemos observar que se as extremidades dos 10 subintervalos são (0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1, 1,2, 1,4, 1,6, 1,8, 2), por sua vez os pontos médios serão (0,1, 0,3, 0,5, 0,7, 0,9, 1,1, 1,3, 1,5, 1,7, 1,9) e o comprimento do subintervalo será dado por:

$$\Delta x = \frac{2-0}{10} = \frac{2}{10}, \text{ de modo que a regra do ponto médio fornece:}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{e^x}{1+x^2} dx &\approx \Delta x \left[ f(0,1) + f(0,3) + f(0,5) + f(0,7) + f(0,9) + \right. \\ &\quad \left. + f(1,1) + f(1,3) + f(1,5) + f(1,7) + f(1,9) \right] \\ &= \frac{2}{10} \left[ 1,041 + 1,2383 + 1,3190 + 1,3515 + 1,3589 + \right. \\ &\quad \left. + 1,3592 + 1,3640 + 1,3790 + 1,4072 + 1,4503 \right] \\ &\approx 2,6537 \end{aligned}$$

O valor do erro relativo será dado por:

$$\left| \frac{2,6631 - 2,6537}{2,6631} \right| \approx 0,00353$$

**3- Use a regra de Simpson com  $n = 10$  subintervalos para aproximar a integral dada. Feito isso, calcule o erro real da aproximação.**

**Solução:**

$$\int_1^4 \sqrt{\ln x} dx$$

$$\text{Calculando } \begin{cases} f(x) = \sqrt{\ln x} \\ n = 6 \\ \Delta x = 0,5 \end{cases}$$

Pela regra de Simpson teremos:



$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x}{3} [f(1) + 4f(1,5) + 2f(2) + 4f(2,5) + 2f(3) + 4f(3,5) + f(4)] \\ & \frac{0,5}{3} \left[ 0 + 4(\sqrt{0,4054}) + 2(\sqrt{0,6931}) + 4(\sqrt{0,9163}) + \right. \\ & \left. + 2(\sqrt{1,0986}) + 4(\sqrt{1,2528}) + f(\sqrt{1,3863}) \right] \\ & \frac{0,5}{3} [0 + 2,5468 + 1,6650 + 3,8289 + 2,0963 + 4,4771 + 1,1774] \\ & \approx 2,6319 \end{aligned}$$

O valor do erro será dado pelo valor da integral menos o valor da aproximação pela regra de Simpson, ficando:

$$2,6614 - 2,6319 = 0,0295$$

### CAPÍTULO 3 – ELEMENTOS DA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A necessidade surge muitas vezes para avaliar a integral definida de uma função que não tem nenhuma antiderivada explícita ou cuja primitiva não é fácil de ser obtida. O método básico envolvido na aproximação  $\int_a^b f(x)dx$  é chamado de quadratura numérica. Ele usa uma soma  $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$  para aproximação  $\int_a^b f(x)dx$ .

Os métodos de quadratura nesta seção baseiam-se nos polinômios de interpolação dada no capítulo 3. A ideia básica é selecionar um conjunto de pontos distintos  $\{x_0, \dots, x_n\}$  do intervalo  $[a, b]$ . Em seguida, integre o polinômio interpolador de Lagrange.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x)$$

e é termo de erro de truncamento sobre  $[a, b]$  para obter

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x)dx + \int_a^b \prod_{i=0}^n (x-x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x-x_i) f^{(n+1)}(\xi(x))dx, \end{aligned}$$

Onde  $\xi(x)$  é em  $[a, b]$  para cada  $x$  e:

$$a_i = \int_a^b L_i(x) dx, \text{ para cada } i = 0, 1, \dots, n.$$

A fórmula de quadratura é, portanto:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

Com o seguinte erro:

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x-x_i) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx,$$

Vamos considerar o primeiro e o segundo polinômio de Lagrange antes de discutir a situação geral das fórmulas de quadratura, fornecendo a regra dos trapézios e a regra de Simpson que são comumente introduzidos em cursos de cálculo.

### 3.1: Método dos trapézios segundo Richard Burdem, J Douglasaires

Podemos derivar a fórmula dos trapézios para aproximar  $\int_a^b f(x) dx$ ,

onde  $x_0 = a$ ,  $x_1 = b$ ,  $h = b - a$  e utilizar o polinômio de Lagrange linear:

$$P_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1).$$

Então:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1) \right] dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1) dx. \quad (4,23)$$

O produto  $(x-x_0)(x-x_1)$  não altera o sinal em  $[x_0, x_1]$  de modo que o valor da média ponderada do Teorema 1.13 de Integrais pode ser aplicada com o termo de erro para dar, por algum  $\xi$  no  $x_0, x_1$ .

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1) dx = f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= f'''(\xi) \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{(x_1 + x_0)}{2} x^2 + x_0 x_1 x \right]_{x_0}^{x_1} \\
 &= -\frac{h^3}{6} f'''(\xi).
 \end{aligned}$$

Consequentemente a equação (4.23) implica que

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \left[ \frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)} f(x_1) \right]_{x_0}^{x_1} - \frac{h^3}{12} f'''(\xi) \\
 &= \frac{(x-x_1)^2}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f'''(\xi).
 \end{aligned}$$

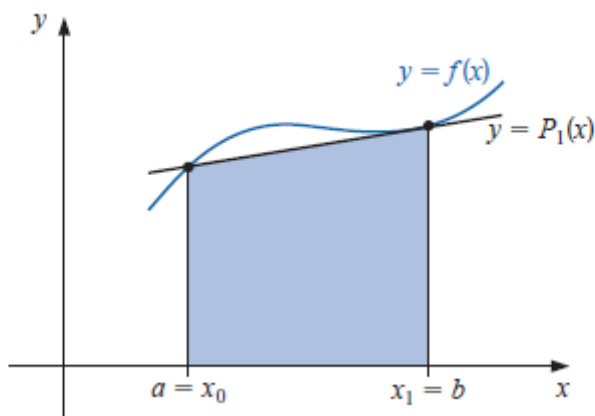
Usando a notação  $h = x_1 - x_0$ , temos a seguinte regra:

### Regra dos Trapézios:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f'''(\xi).$$

Chamamos esta notação de regra dos trapézios porque quando  $f$  é uma função com valores positivos  $\int_a^b f(x) dx$  é aproximada pela área de um trapézio como mostra na figura 9.

Figura 9



O termo de erro para regra dos trapézios envolve  $f''$ . Então a regra dá o resultado exato quando aplicado a função cuja segunda derivada é idêntica a zero, isto é, qualquer polinômio de grau 1 ou menos.

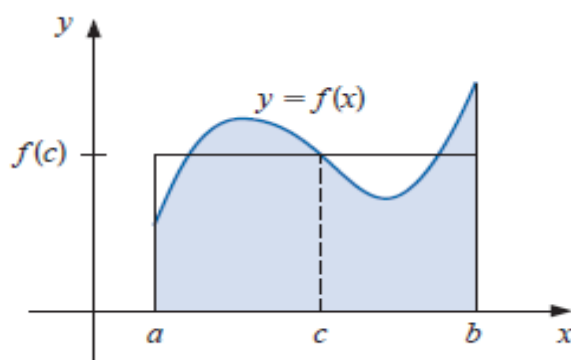
De acordo com o teorema 1.13: Quando  $f \in C[a, b]$ , a Integral de Riemann de  $g$  existe em  $[a, b]$ , e  $g(x)$  não muda em  $[a, b]$ . Em seguida existe um número  $c$  em  $(a, b)$  com

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Quando  $g(x) \equiv 1$ , Teorema 1.13 é usual o Teorema do Valor Médio para Integrais. Ele dá o valor médio da função  $f$  ao longo do intervalo  $[a, b]$  Veja a figura 10

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Figura 10

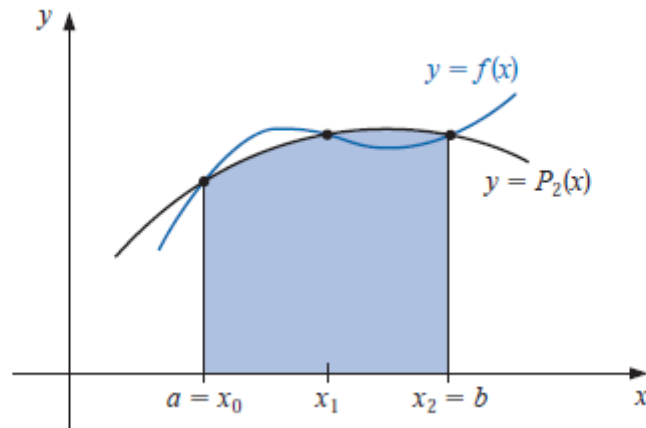


Fonte: BURDEM e FAIRES, 2010, p. 10.

### 3.2 Regra de Simpson

A regra de Simpson resulta da integração do intervalo  $[a, b]$ , segundo o polinômio de Lagrange com os seguintes espaços igualmente divididos  $x_0 = a$ ,  $x_2 = b$  e  $x_1 = a + h$  onde  $h = \frac{(b-a)}{2}$ , conforme a figura 11.

Figura 11



Fonte: BURDEM e FAIRES, 2010, p.195.

Portanto:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} \left[ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6} f^{(3)}(\xi(x)) dx.$$

Derivando a regra de Simpson dessa maneira, no entanto, fornece somente um erro  $O(h^4)$  envolvendo  $f^{(3)}$ . Ao abordar o problema de outra maneira, um termo de ordem superior envolvendo  $f^{(4)}$  pode ser derivado.

Para ilustrar este método alternativo, suponha que  $f$  é expandido no polinômio do terceiro grau de Taylor sobre  $x_1$ . Então para cada  $x$  em  $[x_0, x_2]$  um número  $\xi(x)$  com  $(x_0, x_2)$  existe com

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x-x_1)^4$$

E

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \left[ f(x_1)(x-x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^4 \right]_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4 dx. \quad (4,24)$$

Porque  $(x-x_1)^4$  nunca será negativo sobre  $[x_0, x_2]$ , a fórmula ponderada do Teorema do Valor Médio para integrais 1.13 implica que:

$$\frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4 dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)^4 dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{120} (x-x_1)^5 \Big|_{x_0}^{x_2},$$

Para algum número  $\xi_1$  em  $(x_0, x_2)$ .

Contudo,  $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$  assim

$$(x-x_1)^2 - (x_0-x_1)^2 = (x_2-x_1)^4 - (x_0-x_1)^4 = 0,$$

Enquanto que,

$$(x_2-x_1)^3 - (x_0-x_1)^3 = 2h^3 \text{ e } (x_2-x_1)^5 - (x_0-x_1)^5$$

Conseqüentemente, a equação (4,24) pode ser reescrita como:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60} h^5.$$

Se agora substituir  $f''(x_1)$  pela aproximação do ponto médio

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} \left\{ \frac{1}{h^2} [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi_2) \right\} + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60} h^5 \\ &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{12} \left[ \frac{1}{3} f^{(4)}(\xi_2) - \frac{1}{5} f^{(4)}(\xi_1) \right] \end{aligned}$$

Pode ser demonstrado através de métodos alternativos que os valores  $\xi_1$  e  $\xi_2$  nesta expressão pode ser substituído por um  $\xi$  em  $(x_0, x_2)$ , fornecendo a regra de Simpson.

### Regra de Simpson

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi).$$

O termo de erro na regra de Simpson envolve a quarta derivada de  $f$ , por isso



da classe de polinômio para que estas fórmulas produzam resultados exatos. A próxima definição é usado para facilitar a discussão dessa derivação.

### Definição

O grau de precisão de uma fórmula de quadratura é o maior inteiro positivo  $n$  tal que fórmula é exata para  $x^k$ , para cada  $k = 0, 1, \dots, n$ .

A definição abaixo implica que as regras dos trapézios e de Simpson tem graus de precisão um e três, respectivamente. Integração e somatório são operações lineares; isso é,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$\sum_{i=0}^n (\alpha f(x_i) + \beta g(x_i)) = \alpha \sum_{i=0}^n f(x_i) + \beta \sum_{i=0}^n g(x_i).$$

Para cada par de funções integráveis  $f$  e  $g$  e cada par de constantes reais  $\alpha$  e  $\beta$  este implica que:

- O grau de precisão de uma fórmula de quadratura é  $n$  se e somente se o erro for zero para todos os polinômios de grau  $k = 0, 1, \dots, n$ , mas não será zero para algum polinômio de grau  $n+1$ .

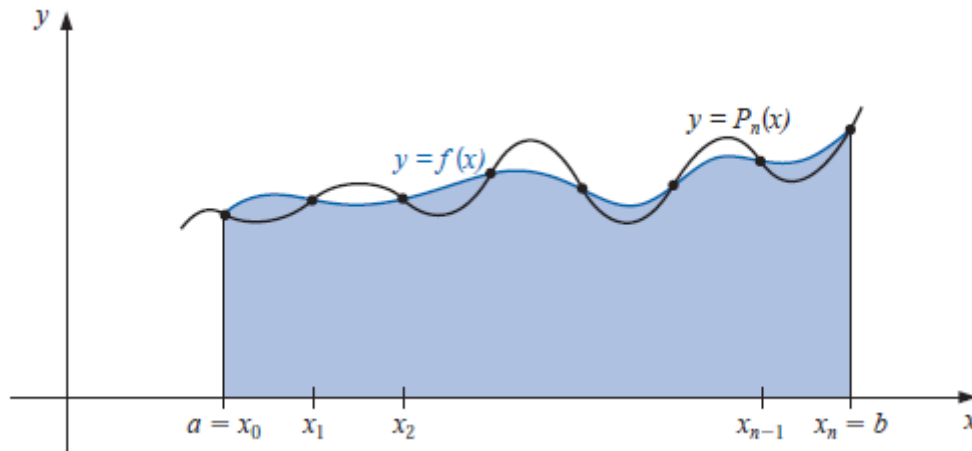
As regras dos trapézios e de Simpson são exemplos de uma classe de métodos conhecidos como Newton-Cotes e se classificam como abertas e fechadas.

### 3.4 Fórmulas Fechadas de Newton-Cotes

O ponto  $(n+1)$ , ponto fechado da fórmula de Newton-Cotes usa  $x_i = x_0 + ih$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ , onde  $x_0 = a, b$  e  $x_n = b = \frac{(b-a)}{n}$  (ver figura 12). Ela é chamada de fechada porque o extremo do intervalo fechado  $[a, b]$  está incluído.



Figura 12



Fonte: BURDEM e FAIRES, 2010, p.198.

A fórmula assume a forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i).$$

Onde,

$$a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} dx.$$

O teorema a seguir detalha a análise de erro associado com o a fórmula fechada de Newton-Cotes.

### Teorema

Suponha que  $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$  indica o  $(n+1)$  ponto fechado da fórmula de Newton-Cotes com  $x_0 = a, x_n = b$  e  $h = \frac{(b-a)}{n}$ . Existe  $\xi \in (a, b)$  para os quais:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2 (t-1) \dots (t-n) dt,$$

Se  $n$  for par e  $f \in C^{n+2}[a, b]$ , e

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t (t-1) \dots (t-n) dt,$$

Se  $n$  for ímpar e  $f \in C^{n+1}[a, b]$ ,

Note que quando o número  $n$  representa um número inteiro par, o grau de

precisão é  $n + 1$  embora a interpolação polinomial seja de grau máximo  $n$ . Quando  $n$  é ímpar o grau de precisão  $n$  é único.

Alguns erros comuns das fórmulas fechadas de Newton-Cotes são listados. Note-se que em cada caso o valor desconhecido  $\xi$  encontra-se em (a, b).

$n = 1$ : Regra dos Trapézios

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi) \text{ onde } x_0 < \xi < x_1$$

$n = 2$ : Regra de Simpson

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \text{ onde } x_0 < \xi < x_2$$

$n = 3$ : Regra de três oitavos de Simpson

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi) \quad \text{onde}$$

$$x_0 < \xi < x_3$$

$n = 4$ :

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi)$$

$$\text{onde } x_0 < \xi < x_4$$

### 3.5 Fórmulas Abertas de Newton-Cotes

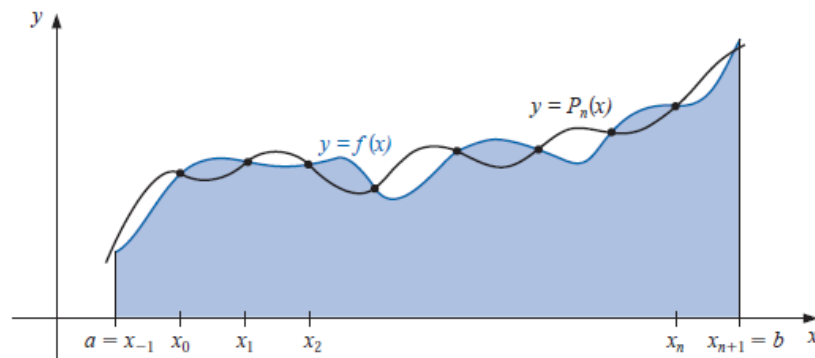
As fórmulas abertas de Newton-Cotes não incluem os pontos finais de  $[a, b]$ . São usados os pontos  $x_i = x_0 + ih$ , para cada  $i = 0, 1, \dots, n$ , onde  $h = (b-a)/(n+2)$  e  $x_0 = a + h$ . Isso implica que  $x_n = b - h$  para que rotular os terminais pelo uso de  $x_{-1} = a$  e  $x_{n+1} = b$ , como mostra a figura 13. As fórmulas abertas contêm todos os pontos utilizados para a aproximação dentro do intervalo aberto  $(a, b)$ . Temos as fórmulas:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i),$$

Onde

$$a_i = \int_a^b L_i(x)dx$$

Figura 13



Fonte: BURDEM e FAIRES, 2010, p. 200.

### Teorema

Suponha que  $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$ , indica o  $(n+1)$  ponto aberto da fórmula de Newton-Cotes, fórmula com  $x_{-1} = a$ ,  $x_{n+1} = b$  e  $h = \frac{(b-a)}{(n+2)}$ . Existe  $\xi \in (a, b)$  para qual:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_{-1}^{n+1} t^2(t-1)\dots(t-n)dt,$$

Se  $n$  é par e  $f \in C^{n+2}[a, b]$  e

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+2)!} \int_{-1}^{n+1} t(t-1)\dots(t-n)dt,$$

Se  $n$  é ímpar e  $f \in C^{n+1}[a, b]$

Podemos notar que no caso dos métodos fechados, que tem grau de precisão comparativamente elevada para os métodos até mesmo do que os métodos impares.

Abaixo seguem algumas das fórmulas de Newton-Cotes com seus termos de erros:

$n = 0$ : Regra do ponto médio

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi), \text{ onde } x_{-1} < \xi < x_1.$$

$n = 1$ :

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)dx = \frac{3h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi), \text{ onde } x_{-1} < \xi < x_2.$$

$$n = 2:$$

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)dx = \frac{4h}{3}[2f(x_0) + f(x_1) + 2f(x_2)] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi), \quad \text{onde}$$

$$x_{-1} < \xi < x_3.$$

$$n = 3:$$

$$\int_{x_{-1}}^{x_4} f(x)dx = \frac{5h}{24}[11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] + \frac{95h^5}{144} f^{(4)}(\xi), \quad \text{onde}$$

$$x_{-1} < \xi < x_4.$$

Exemplo 2:

Comparar os resultados das fórmulas fechadas e abertas de Newton-Cotes listadas nos itens anteriores ( $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ ), ao aproximar:

$$\int_0^{\pi/4} \sin x dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.29289322$$

Pelas fórmulas fechadas temos:

$$n = 1: \frac{(\pi/4)}{2} \left[ \sin 0 + \sin \frac{\pi}{4} \right] \approx 0.27768018$$

$$n = 2: \frac{(\pi/8)}{3} \left[ \sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{4} \right] \approx 0,29293264$$

$$n = 3: \frac{3(\pi/12)}{8} \left[ \sin 0 + 3 \sin \frac{\pi}{12} + 3 \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \right] \approx 0,29291070$$

$$n = 4: \frac{2(\pi/16)}{45} \left[ 7 \sin 0 + 32 \sin \frac{\pi}{16} + 12 \sin \frac{\pi}{8} + 32 \sin \frac{3\pi}{16} + 7 \sin \frac{\pi}{4} \right] \approx 0,29289318$$

E pelas fórmulas abertas temos:

$$n = 0: 2(\pi/8) \left[ \sin \frac{\pi}{8} \right] \approx 0,30055887$$

$$n = 1: \frac{3(\pi/12)}{2} \left[ \sin \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{6} \right] \approx 0,29798754$$

$$n = 2: \frac{4(\pi/16)}{3} \left[ 2 \sin \frac{\pi}{16} - \sin \frac{\pi}{8} + 2 \sin \frac{3\pi}{16} \right] \approx 0,29285866$$

$$n = 3: \frac{5(\pi/20)}{24} \left[ 11 \sin \frac{\pi}{20} + \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{3\pi}{20} + 11 \sin \frac{\pi}{5} \right] \approx 0,29286923$$

Veja o resumo dos resultados e os erros de aproximação na Tabela 4:

Tabela 4

$n$	0	1	2	3	4
Fórmula fechada		0,27768018	0,29293264	0,29291070	0,29289318
Erro		0,01521303	0,00003942	0,00001748	0,00000004
Fórmula aberta	0,30055887	0,29798754	0,29285866	0,29286923	
Erro	0,00766565	0,00509432	0,00003456	0,00002399	

Fonte: BURDEM e FAIRES, 2010, p. 201.

#### 4.0 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Finalizando o objetivo de apresentar os Métodos de Integração, tivemos a oportunidade de conhecer como a integral de Riemann contribuiu para o desenvolvimento de outros métodos como o método do ponto médio, método dos trapézios e método de Simpson, aprendemos um pouco sobre a utilização destes métodos e somos capazes de tirar as conclusões sobre qual método é o mais eficiente, por apresentar uma margem de erro menor.

No decorrer deste trabalho aprendemos também que os métodos ou fórmulas citadas são também conhecidos como fórmulas de Newton-Cotes e recebe este nome em homenagem a Isaac Newton e Roger Cotes. Estas fórmulas classificam-se em abertas e fechadas.

O método do ponto médio, por exemplo, é um modelo de fórmula aberta de Newton-Cotes, pois consiste na utilização apenas dos valores do intervalo aberto da aproximação, ou seja, os valores das extremidades não são utilizados.

Já os métodos dos trapézios e de Simpson são classificados como fórmula fechada de Newton-Cotes, por utilizar os extremos do intervalo  $[a, b]$ .

Através dos estudos podemos concluir que, à medida que o número de  $n$  subintervalos aumenta, o método de Simpson se torna mais preciso se comparado com os métodos dos trapézios e do ponto médio. Isso ocorre pelo fato das aproximações do

método de Simpson utilizarem as médias ponderadas das aproximações dos métodos dos trapézios e do ponto médio.

## 5.0 REFERÊNCIAS:

BURDEN, R. L; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. 9ª edição. Universidade estadual de Youngstown: Cengage Learning, 2010.

FLEMMING, D. M; GONÇALVES, M, B. **Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração**, 6º Edição, Revista e Ampliada. Florianópolis: Pearson, 2006.

Fórmulas de Newton-Cotes. Atualizado em 10/10/2016. Disponível em:

<[https://pt.wikipedia.org/wiki/Integra%C3%A7%C3%A3o\\_num%C3%A9rica](https://pt.wikipedia.org/wiki/Integra%C3%A7%C3%A3o_num%C3%A9rica)>

Acessado em: 25/05/2016

MENDES, R. N. **Cap. 06 - Integração Numérica: Regra do Ponto Médio**. Disponível em:

<<http://www.ebah.com.br/content/ABAAeUlgAI/calculo-numerico?part=10>>.

Acessado em: 02/05/2016.

Método de Simpson, disponível em:

<[http://www.facom.ufms.br/~montera/integracao\\_parte2.pdf/Método-de-simpson](http://www.facom.ufms.br/~montera/integracao_parte2.pdf/Método-de-simpson)>.

Acessado em: 22/04/2016.

Método dos trapézios, disponível em:

<[http://www.astro.iag.usp.br/~carciofi/AGA0503/apostila\\_cap08.pdf](http://www.astro.iag.usp.br/~carciofi/AGA0503/apostila_cap08.pdf)>. Acessado em 30/04/2016.

SOUZA, M. J. F. **Integração Numérica**. Disponível em:

<<http://www.decom.ufop.br/marcone/Disciplinas/MetodosNumericoseEstatisticos/Integracao.pdf/fórmula-composta-de-simpson>>. Acessado em: 22/04/2016.

STEWART, J. **Cálculo, volume I** / James Stewart; [tradução EZ2 Translate]. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Thomas Simpson. Disponível em:

<http://www.apprendre-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Simpson> Acessado em: 26 de abril de 2016.