UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI

Leonardo Lopes Faria

Razão Áurea: Matemática e Arte, a verdadeira harmonia!

São João del Rei
outubro / 2016

Leonardo Lopes Faria

Razão Áurea: Matemática e Arte, a verdadeira harmonia!

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São João del Rei como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Lorena Mara Costa Oliveira

São João del Rei
outubro / 2016

Dedico este trabalho aos meus amigos, família, professores, tutores presenciais e à distância e colaboradores, que acreditaram e apoiaram a minha caminhada até aqui.

Agradeço a Deus Pai, pela força, sabedoria, paciência e amor em relação à minha vida, no que resolvi fazer e onde pretendo chegar.
À minha mãe e minha avó, que sempre acreditaram em mim e que, infelizmente, não estão aqui e agora, para ver mais um passo dado, com humildade e desejo de ser melhor.
Ao meu pai, minhas irmãs e irmãos, pela consideração e amizade.
Estou honrado e abençoado com a presença física e constante de Cássia Cristina e Claudemilson Oliveira, nessa caminhada, abarcando comigo todas as dificuldades e dividindo momentos, me fazendo, junto a eles, chegar ao momento de dizer: sofri, mas, venci!

Só as pessoas medíocres estão sempre satisfeitas consigo mesmas.
Somerset Maugham

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Foto da concha do Nautillus marinho 14
Figura 2 – Foto de uma planta em espiral........ 15
Figura 3 – Foto de escamas de um peixe. 15
Figura 4 – Foto de Margaridas e Girassóis 15
Figura 5 – Figuras e pausas musicais........ 16
Figura 6 – Tipos de Clave........ 16
Figura 7 – Violino........ 17
Figura 8 - Violino Stradivari 17
Figura 9 - Luthier Antônio Stradivari 17
Figura 10 – Teclas de Piano 18
Figura 11 – Prédio do Parthenon 19
Figura - 12 – Taj Mahal 19
Figura - 13 – Prédio da ONU em Nova Iorque 19
Figura - 14 – Esboço do Congresso Nacional (1958) 20
Figura - 15 – Congresso Nacional – Brasília - (DF), (1960) 20
Figura - 16 – Foto de La Gran Geometria - Imagem de Geometria Sagrada........ 32
Figura 17 - Reta em dois segmentos. 21
Figura 18 - Sequência de Fibonacci em formato numérico. 23
Figura 19 - A representação da sequência de Fibonacci na espiral gráfica 24
Figura 20 - A sequência de Fibonacci na forma geométrica 24
Figura 21, 22, 23 - Nos brotos de algumas plantas 25
Figura 24, 25, 26 - Nas folhas de algumas plantas 25
Figura 27, 28, 29 - Em alguns animais 25
Figura 30 - Nas mãos 26
Figura 31 - No braço e suas divisões 26
Figura 32 - No corpo humano 26
Figura 33 - Capela da Ressurreição 26
Figura 34 - Representação da sequência de Fibonacci 27
Figura 35 - Museu da Matemática 27
Figura 36 - Teorema de Pitágoras e razão áurea 28
Figura 37 - A circunferência circunscrita 30
Figura 38 - Dividindo a circunferência em cinco arcos iguais 30
Figura 39 - O pentagrama 30
Figura 40 - Razões Áureas 30
Figura 41 - Estrela Pitagórica 31
Figura 42 - No Pentagrama, o ponto F 31
Figura 43 - No Pentagrama, as medidas das diagonais. 31
Figura 44 - Segmentos do pentagrama na proporção áurea. 31
Figura 45 – Laço Infinito 32
Figura 46 - O Homem Vitruviano, projetos e estudos de Leonardo da Vinci. 34
Figura 47 - A pintura da Monalisa. 35

Figura 48 – A Monalisa 35
Figura 49 - Segmento Áureo 36
Figura 50 - Linhas e ângulos do Pentágono Regular 38
Figura 51. Triangulo Isósceles ACD 38
Figura 52 - Triângulos Isósceles ACD e DFC 39
Figura 53 - Quadrado ABCD 40
Figura 54 - Quadrado ABCD com pontos médios em E e F 40
Figura 55 - Diagonal $\boldsymbol{FB}$ do retângulo EBDF 41
Figura 56 - Construção geométrica do segmento áureo a partir de um quadrado 41
Figura 57 - Decágono e razão áurea 42
Figura 58 - O Retângulo Áureo e suas peculiaridades 43
Figura 59 - Retângulo de Ouro ou Harmônica 43
Figura 60 - Espiral Logarítmica 44
Figura 61 - Espiral de Arquimedes 44
Figura 62 - Espiral de Fibonacci 44
Figura 63 - Espiral Hiperbólica 45

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.C: Antes de Cristo
ONU: União das Nações Unidas
DF: Distrito Federal

Resumo

O objetivo deste trabalho de conclusão de curso é abordar os conhecimentos, através da pesquisa bibliográfica e em sites da internet, em relação à Razão Áurea com a sequência de Fibonacci, os Pitagóricos e Leonardo Da Vinci, a natureza, a matemática, a arte, a arquitetura e a música, dentre outros, nem sempre ensinados em sala de aula, ou, ainda, menos difundidos ou divulgados, mas, importante para despertar o interesse dos alunos pelos estudos matemáticos e, consequentemente, de outros conteúdos do saber, de forma prazerosa e agradável, chegando o mais próximo possível de uma boa conceituação e apresentação do número áureo, quebrando, ao máximo, sua mistificação e desconhecimento.

Palavras-chave: Pesquisa, Razão Áurea, Conteúdos.

Abstract

The objective of this work is to approach the knowledge, through the bibliographical research and in internet sites in relation to the Golden Ratio with the Fibonacci sequence, the Pythagoreans and Leonardo Da Vinci, nature, mathematics, art, Architecture and music, among others and not always taught in the classroom, or even less widespread or publicized, but important to motivate students' interest in mathematical studies and consequently other content of knowledge, in a pleasant and pleasant way As close as possible to a good conceptualization and presentation of the golden number, breaking to the maximum, its mystification and ignorance.

Keywords: Research, Golden Ratio, Contents

Sumário

Introdução 10
Capítulo 1 12
1.1. Um pouco de história 12
1.2. Razão Áurea 13
1.2.1. Na natureza 14
1.2.2. Na música 16
1.2.3. Na arquitetura 18
Capítulo 2 21
2.1. Curiosidades 21
2.1.1. A sequência de Fibonacci e o número áureo 22
2.1.2. Os pitagóricos e a razão áurea 27
2.1.3. Leonardo da Vinci: o grande mestre 33
3.1. O segmento áureo 36
3.2. Pentágono regular e o triângulo áureo 37
3.3. Retângulo áureo 40
3.4. Espira logarítmica 43
4. Considerações finais 46
5. Bibliografia 47

Introdução

No intuito de se fazer conhecer o número áureo, a razão áurea ou número de ouro, partiremos de um conceito básico, passando e passeando por um pouco de história dessa espetacular proporção, envolvendo algumas áreas do saber.

Traremos uma notação e síntese de acontecimentos propostos para a realização do conceito e suas aplicações.

Neste trabalho iremos discorrer sobre o número áureo. Falaremos onde e como essa razão de proporção pode ser encontrada, pois, por ser um assunto atrativo, observamos que ele é pouco difundido e menos ainda conhecido.

Com este trabalho, propomo-nos a pesquisar, estudar e estimular assuntos relacionados ao número áureo.

O número áureo ou razão áurea é muito utilizado, em várias áreas do conhecimento, tais como: na natureza, na química, física, arquitetura, artes e música, dentre muitas outras.

Sabemos que o estudo da razão áurea é antigo, vindo de tempos remotos, chegando até a atualidade, sendo mostrado a cada momento. Mas, poucos de nós a percebemos, por falta de esclarecimentos e conhecimentos clássicos. Ela é uma proporção constante, de uma harmonia simples, única e arrojada.

Ela vai além da matemática, com suas fórmulas e funções, e podemos acrescentar que tais proporções estão voltadas para a harmonia e beleza do lúdico, na arte e nas suas diversas formas e esculturas, com diversidade de conteúdos observados (caso a conheçamos melhor) na vida cotidiana de qualquer ser humano.

O trabalho foi estabelecido da seguinte forma:

No capítulo um, passearemos um pouco pela história da matemática, abordando e celebrando a importância dos egípcios, dos pitagóricos e da Grécia antiga, Leonardo da Vinci com o Renascentismo e a sequência de Fibonacci, com sua divagação sobre a natureza, com o objetivo de distinguir e perceber a razão áurea nas mais variadas situações e implicações, na natureza com os animais, flores e plantas diversas, na música, na literatura, nas artes, na arquitetura, e, sobretudo na própria Matemática, com suas aplicações nos triângulos, retângulos, dentre outras formas e figuras, com o interesse de se chegar próximo de uma boa conceituação e apresentação desse número áureo, quebrando ao máximo possível sua mistificação e desconhecimento.

No capítulo dois, traremos curiosidades sobre Leonardo da Vinci, os pitagóricos e Fibonacci, abordando suas características no uso da razão áurea, inspirando conhecimento, com suas habilidades, construções e realizações, sempre voltadas para o uso do número áureo.

E, por fim, no capítulo três, falaremos do segmento áureo, do Pentágono regular e do Triângulo áureo, do Retângulo áureo e da Espira logarítmica, demonstrando a razão áurea na matemática.

Este trabalho será fechado com as considerações adquiridas durante a pesquisa e a construção desse novo conhecimento, sempre tentando entender onde, quando e como acontece a razão áurea, em todas as áreas do saber.

Não se pode deixar de dizer que muito se tem para estudar, conhecer e divulgar o conceito da razão áurea, bem como distinguir e perceber o quanto essa proporção divina faz parte de nossas vidas.

O objetivo final deste trabalho é focar a importância da razão áurea e suas aplicações nas diversas situações cotidianas e áreas do conhecimento, com a melhor exposição possível, através de fórmulas, desenhos, fotografias e exemplificações.

Capítulo 1

1.1. Um pouco de história

Conhecendo um pouco da história da matemática, podemos perceber que ela é muito mais interessante do que uma simples exibição de fórmulas feitas, prontas e acabadas, que nos são apresentadas.

No Egito antigo, percebemos muito das aplicações da razão áurea, na sua arquitetura, nos seus templos religiosos e em suas pirâmides. Os antigos egípcios eram exatos no contar e medir.

Também a razão áurea foi muito aplicada na Grécia antiga. Os gregos atribuíam-lhe propriedades mágicas e usavam-na na construção de edifícios, como, por exemplo, o Parthenon (entre 447 e 433 a.C.), e a encontraremos também na arquitetura moderna. Podemos ver no Parthenon Grego a contemplação da razão de ouro no retângulo que contém a sua fachada, nos revelando a realização de uma obra de alta beleza e harmonia.

É notável que os pitagóricos desempenhassem um papel importante e imprescindível na história da matemática. A escola grega, de Pitágoras, estudava relações e modelos numéricos que apareciam na natureza (os "números", para os pitagóricos, regiam o universo), na harmonia musical, dentre outros. Mas, provavelmente, a mais importante é a razão divina ou proporção divina. Podemos concluir que a Matemática não surgiu pronta e definida, mas, cresceu dentro das necessidades de se resolver problemas do cotidiano das pessoas ou civilizações.

Com Leonardo Da Vinci, à época do Renascimento, foi especial. Ele usou a razão áurea em muitas obras de arte, nas pinturas renascentistas e no corpo humano, entrelaçado com a concepção de estética, chamada por ele de divina proporção.

A razão áurea seria ainda aplicada por Fibonacci ligando a matemática à natureza.

O homem sempre tentou alcançar a perfeição, se aproximar de Deus. Tanto que algumas vertentes místicas acreditavam que o número áureo foi mesmo um presente Dele para a humanidade, e que qualquer objeto cujas dimensões estão relacionadas a Φ (Phi) é capaz de entrar em harmonia e provocar a sensação singela de leveza e beleza.

> A história da Matemática é importante também como uma valiosa contribuição à história da civilização. O progresso humano está intimamente identificado com o pensamento científico. [...] A história da Matemática é uma das amplas janelas pelas quais a visão filosófica olha as épocas passadas e traça a linha do desenvolvimento intelectual. (CAJORI, 2007)

Podemos perceber a incansável busca dessa perfeição, nas pinturas, nos compassos musicais através da construção de suas notações, melodias e harmonias, dentro de um compasso em composição com a clave a que se destina e na sua execução, também nos projetos arquitetônicos e nas esculturas, dentre tantos outros.

Conseguimos distinguir e perceber a sua presença nas mais variadas situações e implicações, abarcando diversos campos, na natureza com os animais, flores e plantas diversas, na química, na física, na música, na literatura, nas artes, na arquitetura com suas construções, e, sobretudo na própria matemática com suas aplicações nos triângulos, retângulos, dentre outras formas e figuras. Ela se faz presente em tantas outras áreas quanto o homem ainda não conseguiu acompanhar, pois se trata de um número diferenciado. O número de ouro ou razão áurea é um número irracional muito particular.

Não se pode precisar a quantidade de aplicações e eventos possíveis para essa proporção, chamada de razão áurea.

1.2. Razão Áurea

A razão áurea, com um valor equivalente a 1,618, é representada pelo nome de Phi (Φ), e é uma homenagem ao arquiteto grego Phidias, construtor do Parthenon e de muitas outras obras.

Através da história, segundo grandes historiadores, ele sempre usou a razão áurea em muitos de seus trabalhos.

A razão áurea é um tema para muitos estudos, divagação e exploração em vários aspectos e conteúdos, tanto matemáticos quanto nas mais diversas áreas do conhecimento.

Malba Tahan, no livro As Maravilhas da Matemática, nos diz que:

> Nos domínios da mais pura e elevada Fantasia, a Matemática é um amontoar contínuo, maravilhoso, de surpresas, de problemas vivos e curiosos, de teorias espantosas, de sutilezas filosóficas que nos deslumbram. (Pag. 127).

A razão áurea também é muito importante e influente no aprendizado da Matemática e outras tantas e variadas áreas, pois, pode ser encontrada em situações diferenciadas, como a vida cotidiana, a natureza, a arquitetura, a odontologia, música e pintura.

Mas, falaremos apenas de algumas dessas diversidades.

1.2.1. Na natureza

Podemos encontrar a razão áurea na natureza, por exemplo, na concha do caracol Nautillus, na distribuição das sementes das plantas, nas escamas de peixes, na margarida, no girassol, na concha de moluscos, entre outros.

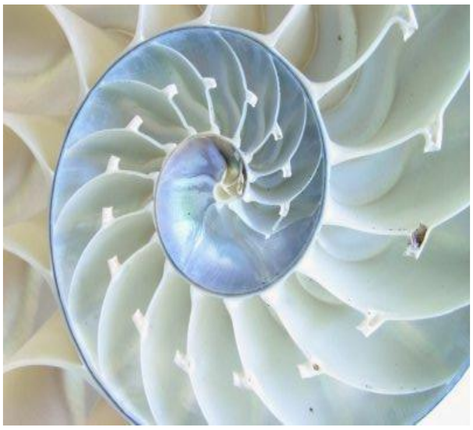


Figura 1 – Foto da concha do Nautillus marinho
Fonte: **http://infinito-matematica.co/wp-content/uploads/2011/05/nautiluapeq1.png**

Figura 2 – Foto de uma planta em espiral.
Fonte: **https://br.pinterest.com/pin/305470787198406113/**

Figura 3 – Foto de escamas de um peixe.
Fonte: http://espacocienciasquintoano.blogspot.com.br/2010/11/pele-com-escamas.html

Figura 4 – Foto de Margaridas e Girassóis
Fonte: Disponível em http://wwwmadeofcotton.blogspot.com.br/2014/04/tendencia-estampa-de-margarida-e.html

1.2.2. Na música

Na música, podemos observar a presença da razão áurea em diversas obras, especialmente na Sinfonia nº 5 de Ludwig Van Beethoven, nas obras do Húngaro Béla Bartók, do francês Claude Debussy, dentre outros.

A razão áurea é uma proporcional indispensável e está presente nas variações e notações, entre o ritmo e a melodia, nos arranjos, relacionando números inteiros, visando à variação do tempo das notas musicais, como também tons e compassos.

A relação da razão áurea com a música vai desde a composição musical até a construção de instrumentos, e principalmente, na sua execução.

Entendendo as relações históricas entre a música e os números, o homem acabou pesquisando, criando, descobrindo e aperfeiçoando a notação musical, colocando-as em sintonia dentro dos compassos de qualquer tipo de partitura e ou clave.

Dentre os vários instrumentos musicais, falaremos um pouco do Piano e do Violino.

Figura	Pausa	Tempo	Nome
𝅝	𝄻	4	SEMIBREVE
𝅗𝅥	𝄼	2	MÍNIMA
♩	𝄽	1	SEMÍNIMA
♪	𝄾	1/2	COLCHEIA
𝅘𝅥𝅯	𝄿	1/4	SEMICOLCHEIA
𝅘𝅥𝅰	𝅀	1/8	FUSA

Figura 5 – Figuras e pausas musicais[1]
Fonte: http://magiadamusica.webnode.pt/figuras-musicais/

Figura 6 – Tipos de Clave
Onte: http://musicienciarte.blogspot.com.br/2015/01/teoria-musical-aula-2.html.

[1] Exemplo pode ser modificado em relação ao tempo musical.

O violino é um instrumento no qual a razão áurea, de fato, aparece com frequência. Formado por quatro cordas: Mi, Lá, Ré e Sol, ele é um instrumento melódico, o mais agudo da família das cordas, sendo também o que mais se aproxima da voz humana.

Figura 7 – Violino.
Fonte: http://coisadeviolinista.blogspot.com.br/2014/03/um-pouco-sobre-violino.html.

Figura 8 - Violino Stradivarius
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Estradiv%C3%A1rio

Figura 9 - Luthier Antônio Stradivarius[2]
http://www.concerto.com.br/textos.asp?id=336.

Alguns dos violinos mais famosos em todo o mundo foram feitos por Antônio Stradivarius (1644 - 1737), de Cremona, na Itália. Esses violinos e instrumentos são considerados os melhores de todos os tempos e continuam a ser o padrão em

[2] Representação do Luthier Antônio Stradivari na criação de um violino[2]

forma, som e beleza. Stradivarius tinha um cuidado especial em dispor geometricamente o lugar dos “olhos”, em posições determinadas pela razão áurea.

Outro instrumento instigante e formidável é o piano, com uma sonoridade ímpar e harmônica. Seu teclado é caracterizado por teclas percutidas. Em cada oitava de um piano, observamos a composição formada por doze teclas, sendo sete teclas brancas (notas naturais) e cinco teclas pretas (notas alteradas). As cinco teclas pretas formam um grupo de duas teclas e outra de três teclas.

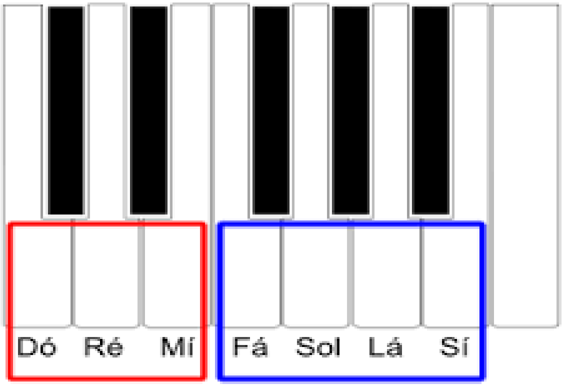


Figura 10 – Teclas de Piano
Fonte: http://canone.com.br/teclado-e-piano/210-como-identificar-as-notas-no-teclado-ou-piano

1.2.3. Na arquitetura

Na arquitetura, a razão áurea aparece na idealização e construção de diversos edifícios, desde a antiguidade, perdurando e agregando novas considerações harmônicas, até os tempos atuais.

Podemos exemplificar algumas dessas construções, como o Parthenon, edifício grego construído entre 447 a. C. e 443 a.C.; o Taj Mahal, construído pelo imperador indiano Shah Jahan, entre 1630 e 1652, sobre o túmulo de sua esposa chamada Aryumand Banu Began; o edifício sede das Nações Unidas, construído em Nova York entre 1948 e 1952; e o Congresso Nacional, em Brasília, (inaugurado em 1960), de Oscar Niemeyer,

Oscar Niemeyer, com suas formas arquitetônicas diferenciadas, contraria os princípios estruturais, mas deixa suas obras funcionais e cria uma beleza diferente, harmônica e inovadora, pois a beleza e funcionalidade representam uma harmonia proporcional nas relações numéricas e geométricas, propondo à sociedade e suas exigências uma relação com o novo, extremo e belo.

Abaixo, veremos alguns exemplos de construções, clássicas e belas, da representação do número áureo na arquitetura no mundo e no tempo.

Figura 11 – Prédio do Parthenon
Fonte: http://pt.slideshare.net/fragoso7/o-numero-de-ouro

Figura - 12 – Taj Mahal
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Taj_Mahal

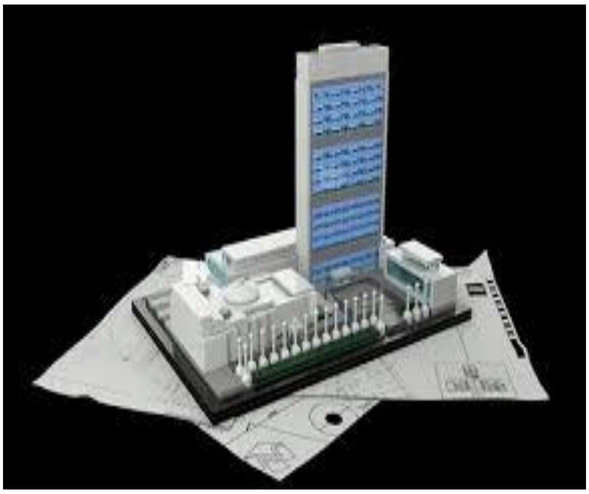


Figura - 13 – Prédio da ONU em Nova Iorque
Fonte: http://www.galeriadaarquitetura.com.br/

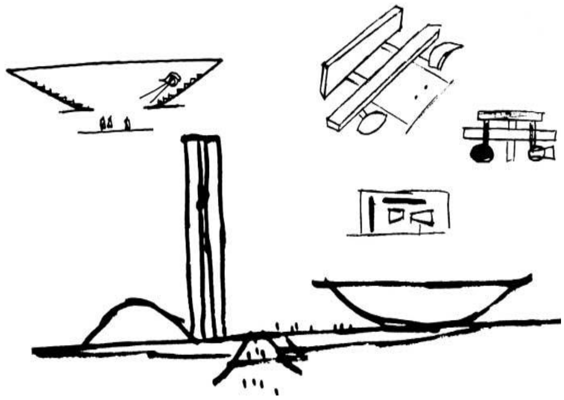


Figura - 14 – Esboço do Congresso Nacional (1958)
Fonte: https://peganarquitetura.wordpress.com/2013/01/06/croqui-niemeyer/congresso-nacional-1958-brasilia2/

Figura - 15 – Congresso Nacional – Brasília - (DF), (1960)
http://www.brasilia.df.gov.br/index.php/2016/02/22/congresso-nacional/

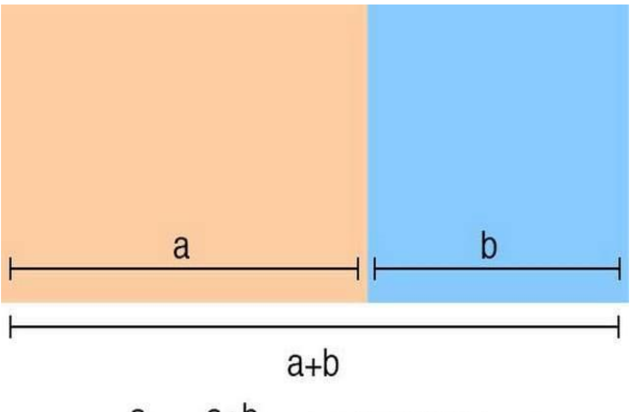
Capítulo 2

2.1. Curiosidades

Usaremos este capítulo para descrever a importância de alguns artistas e matemáticos inspiradores do conhecimento, com suas habilidades e construções, com vistas à razão áurea e suas características.

Queremos aludir e inferir aqui as suas colaborações e essencialmente a descoberta, a transformação e a comunicação provocada por essa razão, na natureza, nas artes, na harmonia, em nossas construções arquitetônicas e, sobretudo, elencar um pouco mais dos conhecimentos em relação à nossa vida cotidiana, usando algumas ilustrações e informações necessárias.

Matematicamente falando, a proporção áurea é uma constante real algébrica irracional obtida quando dividimos uma reta em dois segmentos de forma que o segmento mais longo da reta dividida pelo segmento menor seja igual à reta completa dividida pelo segmento mais longo, e seu valor é constituído por 1,6180339887... ou arredondando, 1,6180. Complicado de entender? Talvez a imagem a seguir ajude um pouco:



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1.618033987 = \phi$$

Figura 16 - Reta em dois segmentos.
Fonte: www.megacurioso.com.br.

E você reparou que a equação que aparece na parte inferior da figura conta com uma letrinha esquisita? Essa é a letra grega"*Phi"*— ou φ —, e a escolha dela para representar a proporção áurea tem a ver com o arquiteto e matemático grego

Phidias, que, segundo acredita-se, provavelmente empregou o conceito quando projetou o Parthenon, isso lá no século V, a.C. (RINCÓN. 2015)[3]

2.1.1. A sequência de Fibonacci e o número áureo

Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa ou Leonardo Bigollo, e ainda o diminutivo de filho de Bonacci, nasceu em Pisa, na Itália, em 1175, e faleceu também em Pisa, em 1250. É considerado o primeiro grande e talentoso matemático europeu da Idade Média.

Fibonacci tornou-se conhecido pela descoberta da sequência que mais tarde levaria seu nome e pelo seu papel na introdução dos algarismos arábicos na Europa. Trecho retirado do Ebook: SORGE (2015, p. 45)[4].

Do seu aprendizado, muito se deve creditar às obras de Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, de Abu Kamil e de outros mestres árabes.

Em 1202, aos 32 anos, publicou o Liber Abaci (Livro do Ábaco ou Livro de Cálculo), que trata da álgebra e da aritmética através de problemas elementares. Nesse livro, o famoso problema sobre a procriação de coelhos, ficou conhecido por gerar a sequência de Fibonacci (fato que relataremos mais abaixo).

O Livro do Ábaco introduziu os numerais hindu-arábicos na Europa, além de discutir muitos problemas matemáticos.

Em 1.220, Leonardo escreveu a Pratica Geometriae e, em 1.228, uma edição enriquecida e ampliada do Liber Abaci. A obra de Leonardo foi importantíssima, pois inspirou inúmeros seguidores, principalmente na Itália, e representou um marco na história da ciência Ocidental. A estas alturas, sua reputação de grande matemático já era conhecida.[5]

No século XIX, uma estátua foi erguida em Pisa, em sua homenagem. Ela hoje está localizada na galeria ocidental do Camposanto, Cemitério Histórico da Piazza dei Miracoli.

---

[3] RINCÓN, Maria Luciana. Fonte: http://www.megacurioso.com.br/matematica-e-estatistica/74174-voce-sabe-o-que-e-a-proporcao-aurea.htm.

[4] Os Gêmeos Márcio e Marcelo Sorge, em 2012, desenvolvem um novo trabalho: MMSorge Frequências de Fibonacci.

[5] **Fonte**: http://www.grupoescolar.com/pesquisa/leonardo-fibonacci.html.

Vamos conhecer alguns detalhes e curiosidades sobre o problema, que surgiu do estudo desse matemático, sobre a reprodução de coelhos. Fibonacci ostentou que os coelhos não morreriam e que atingiriam a maturidade em apenas um mês, e que reproduziriam de mês a mês, dando à luz sempre um casal. Assim, começando com um par de coelhos, começou-se a contar os pares de coelhos:

Quantos pares de coelhos poderiam ser gerados a partir de um par de coelhos, em um ano, se de um modo natural a cada mês ocorresse a reprodução de um novo par, sendo que esse novo par se tornará produtivo ao completar dois meses de vida?

Problema inicial: ***1casal de coelhos.***

1º mês: 1 casal;

2º mês: 1 + 1 = 2 casais;

3º mês: 1 + 2 = 3 casais;

4º mês: 2 + 3 = 5 casais;

5º mês: 3 + 5 = 8 casais;

6º mês: 5 + 8 = 13 casais;

(...)

12º mês: 55 + 89 = 144 casais;

Também podemos representar a sequência acima da seguinte forma: a soma dos dois números anteriores, sempre formando o próximo número. Sua representação matematicamente será definida por: **Fn = Fn-1+Fn-2,** em um processo de recorrência.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 521...

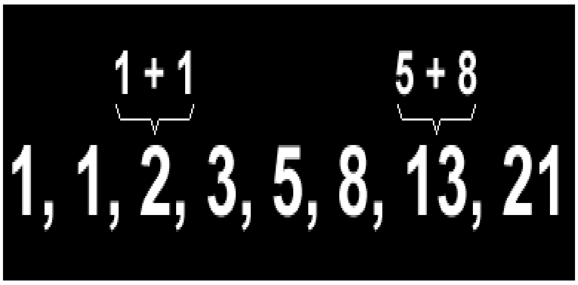


Figura 17 - Sequência de Fibonacci em formato numérico.
Fonte: http://paxprofundis.org/livros/1123/1123.htm

Apontamos aqui mais uma curiosidade sobre a sequência de Fibonacci, a razão entre *89* e *55, 233 e 144,* dentre outros, por exemplo, dará aproximadamente, *1,618..., ou seja:*

$$Fn \div Fn - 1 \approx \Phi,$$

desta forma representaremos que:

$$\frac{89}{55} \approx 1.618$$

e

$$\frac{233}{144} \approx 1.618,$$

dentre outros.

Ao construirmos triângulos isósceles (ABC), observamos que os seus ângulos internos de vértices B e C têm 72º de amplitude, respectivamente, e, ao construirmos novos triângulos no seu interior, todos eles, também terão dois ângulos internos com 72º de amplitude. Conforme veremos na figura abaixo.

$$m < ABC = 72°$$

$$m\overrightarrow{AB} = 10.06\ cm$$

$$m\overrightarrow{BC} = 6.22\ cm$$

$$\frac{(m\overrightarrow{AB})}{(m\overrightarrow{BC})} = 1.618$$

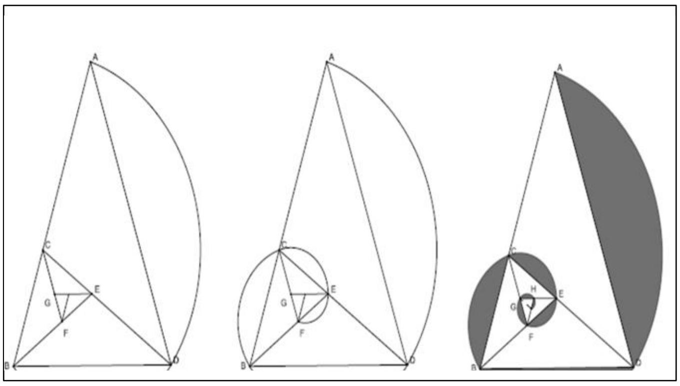


Figura 18- A representação da sequência de Fibonacci na espiral gráfica
Fonte: https://www.emaze.com/@AOOLZOQO/Espirais-Aurea.pptx

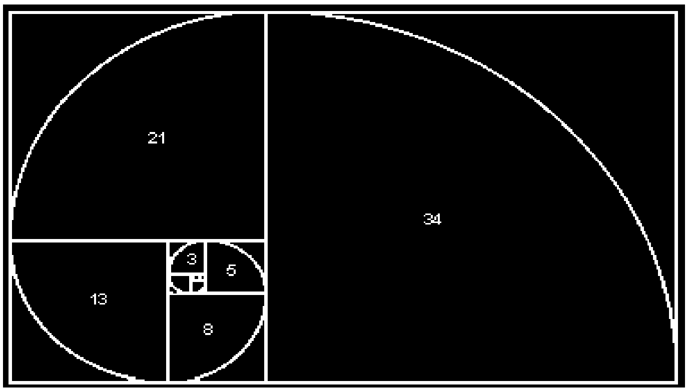


Figura 19 - A sequência de Fibonacci na forma geométrica
Fonte: http://paxprofundis.org/livros/1123/1123.htm.

Já vimos que muitas obras de arte do passado e do presente foram criadas com essa sequência matemática perfeita e divina. Assim, abaixo mostraremos algumas figuras relacionadas ao tema: Fibonacci e a sequência de ouro.

MMSORGE, (2015) diz que, “todos os animais, dos mais simples e microscópicos até os maiores e mais complexos, incluindo nós seres humanos, somos frutos dessa constante harmônica. O número de ouro!”[6]

Abaixo veremos algumas dessas situações, com ilustrações apresentadas nesse livro.

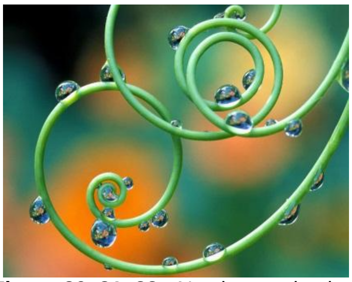




Figura 20, 21, 22 - Nos brotos de algumas plantas
Fonte: Ebook MMSorge - Frequências Fibonacci (pág. 57 e 58).



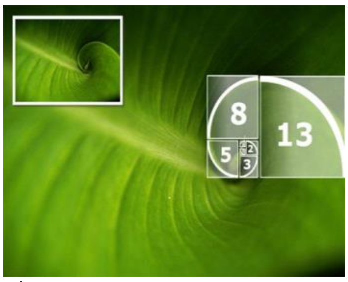


Figura 23, 24, 25 - Nas folhas de algumas plantas
Fonte: Ebook MMSorge - Frequências Fibonacci (pág. 59 e 60).

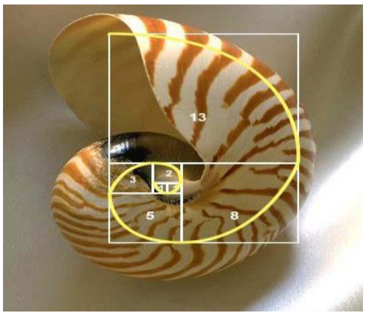



Figura 26, 27, 28 - Em alguns animais
Fonte: Ebook MMSorge - Frequências Fibonacci (pág. 62, 64 e 65).

[6] SORGE, Frequências de Fibonacci, uma introdução para: Cimática Epigenétic, reprogramação celular, recodificação e ativação DNA-RNA e batimentos binaurais.

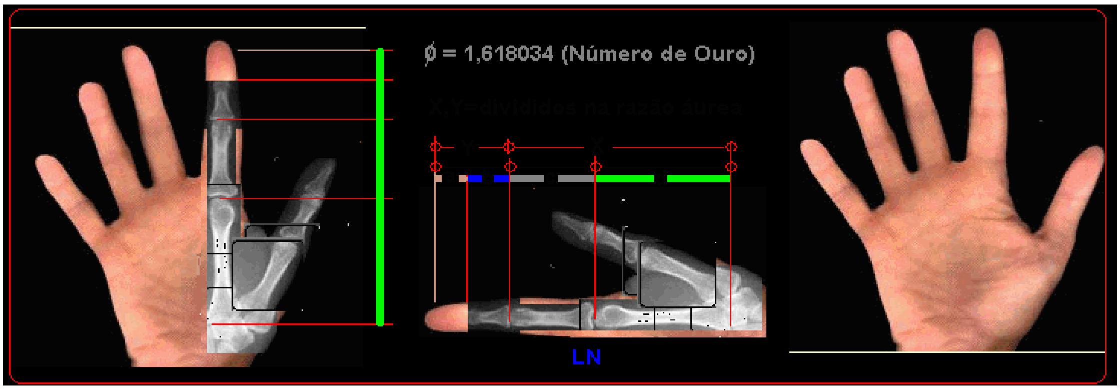


Figura 29 - Nas mãos
Fonte: Ebook MMSorge - Frequências Fibonacci (pág. 68).

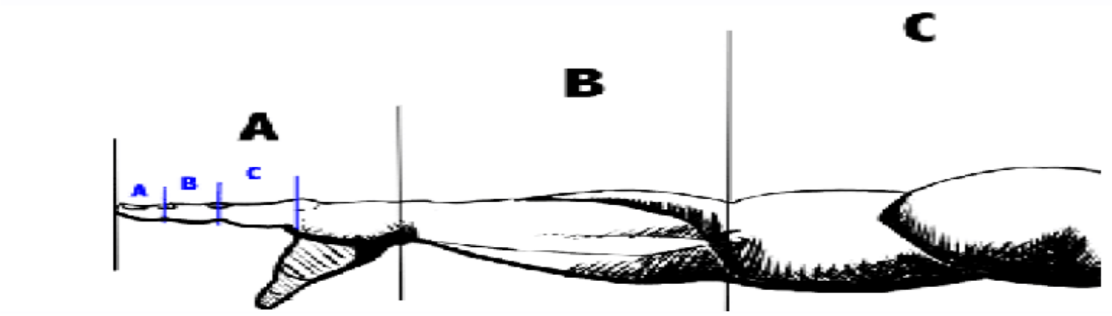


Figura 30 - No braço e suas divisões
Fonte: Ebook MMSorge - Frequências Fibonacci (pág..69)

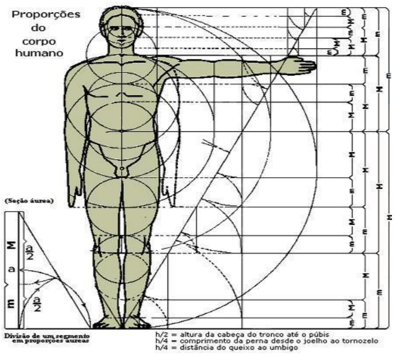


Figura 31 - No corpo humano
Fonte: Ebook MMSorge - Frequências Fibonacci (pág. 70).

Mostraremos, também, a sequência de Fibonacci, na arquitetura:

Figura 32 - Capela da Ressurreição
Fonte: http://arquiteturanaweb.blogspot.com.br/2015/05/secao-aurea.html

Figura 33 - Representação da sequência de Fibonacci[7]
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Propor%C3%A7%C3%A3o_%C3%A1urea.

Figura 34 - Museu da Matemática[8]
Fonte: http://matematicablog.com.

2.1.2. Os pitagóricos e a razão áurea

Pitágoras nasceu no ano de 570 a.C na ilha de Samos, próxima à região da Jônia, região da Ásia Menor. Provavelmente, morreu no ano de 497 ou 496 a.C, em Metaponto (região sul da Itália).

Ele foi um importante matemático e filósofo grego, recebendo muita influência científica e filosófica dos filósofos gregos Tales de Mileto, Anaximandro e Anaxímenes.

“O Grande Mestre”, como era chamado por seus discípulos, teve grande influência, não só por suas doutrinas filosóficas, mas, também, por sua ética pura e severa, além de suas tendências políticas.

Ele absorveu não só informações matemáticas e astronômicas como também muitas ideias religiosas.

Pitágoras fundou sua escola (Escola Pitagórica, dedicada a estudos religiosos, científicos e filosóficos), na região da Magna Grécia, atual sul da Itália, e

---

[7] Representação da sequência de Fibonacci na Mole Antonelliana em Turim, Itália.
[8] Museu da Matemática **-** Coração de Nova Iorque.

desenvolveu uma linha de pensamento que se estendeu de Platão até Galileu, Giordano Bruno, Leibniz, Kepler e Newton.

Dentre as muitas descobertas, não podemos deixar de vislumbrar que ele, visitando o Egito, impressionado com as pirâmides, desenvolveu o famoso Teorema de Pitágoras (Teorema que leva seu nome, e é muito aplicado e estudado em nossas escolas na atualidade).

Através desse Teorema, é possível calcular o lado de um triângulo retângulo, conhecendo os outros dois lados, assim, provando que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

O teorema de Pitágoras também guarda relação com a razão áurea, como se pode observar a seguir. Os egípcios utilizavam o triângulo cujos comprimentos dos lados eram 3; 4; 5, pois sabiam que ele possuía um ângulo reto.

Se forem efetuadas construções geométricas nesse triângulo, percebe-se que a razão áurea aí também aparece. (SOUZA, 2013.)[9]

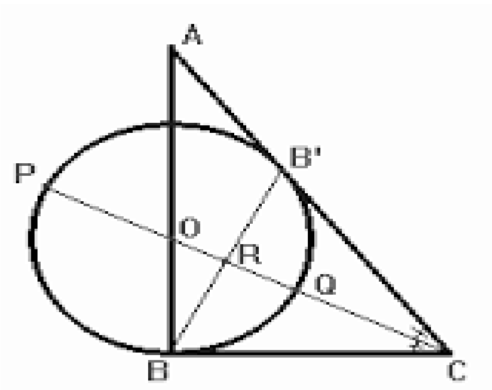


Figura 35 - Teorema de Pitágoras e razão áurea
Fonte: Souza, 2013, pág. 36.

Embora não haja documentos da época, provavelmente, foram os pitagóricos os primeiros a demonstrarem a relação entre os lados do triângulo retângulo: a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Os pitagóricos foram os primeiros a aprender a cultura das matemáticas, de modo sistemático, notando que todos os fenômenos naturais poderiam ser traduzidos pelas relações numéricas e representados de modo matemático.

Para Pitágoras e seus seguidores, a natureza era constituída de um sistema de relações e proporções matemáticas provindas da unidade, utilizando a proporção áurea para explicar a harmonia entre a alma e o cosmo.

[9] SOUZA, A. R. Dissertação de Mestrado.

O pensamento alcança a realidade em sua estrutura matemática enquanto os sentidos alcançam o modo como esta estrutura permeia em nós.

Eles avançaram para uma investigação científica mais elevada, a abstração matemática, e, apoiados em seus princípios, os pitagóricos desenvolveram uma espécie de análise do número, cujos resultados são aplicados na realidade e na atualidade.

Eles não investigavam como eram formadas as coisas, mas, sim, o que elas eram e sua resposta sempre foi que todas as coisas são números**.** Estes princípios do número, adquiridos racionalmente, são também os princípios do ser. As coisas se compõem de finito e infinito. Tudo é, portanto, harmonia.

E, por falar em harmonia, Pitágoras também descobriu as 7 (sete) notas musicais (sabemos que essas notas mudam de tons dentro de um compasso e suas variações) e, assim, ele e seus discípulos perceberam que a música obedecia a leis de harmonia matemática, vislumbrando também que o universo, natural e humano, se submetia a essas mesmas leis.

Quando ele descobriu que as proporções no pentagrama eram a proporção áurea, tornou esse símbolo estrelado como a representação da Escola Pitagórica.

Os Pitagóricos sabiam que havia uma relação áurea no pentágono e que o mesmo detinha uma série de razões áureas, ou seja, a razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado da razão áurea.

Também pode ser observado que a razão entre as medidas das áreas dos dois pentágonos é igual à quarta potência da razão áurea. Cada face pentagonal, associada à divisão áurea, era de interesse especial para os pitagóricos.

Como já falamos em outras partes deste trabalho, o número de ouro (razão áurea) é representado pela letra grega *Phi*, sendo que essa proporcionalidade de 1,618 passou a ser utilizada nas artes, na construção de templos, palácios e pirâmides, dentre tantas outras obras e áreas.

Através dessa proporção, observamos que o número de ouro ou razão áurea, foi o primeiro número irracional de que o homem teve consciência.

Abaixo, usaremos algumas figuras para ilustrar as várias facetas do Pentagrama:

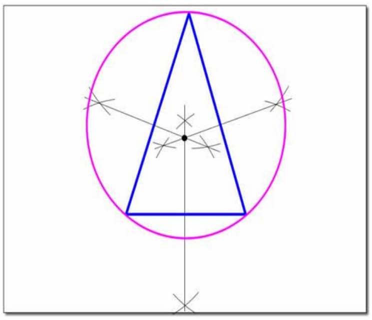


Figura 36 - A circunferência circunscrita
Fonte: http://www.bpiropo.com.br.

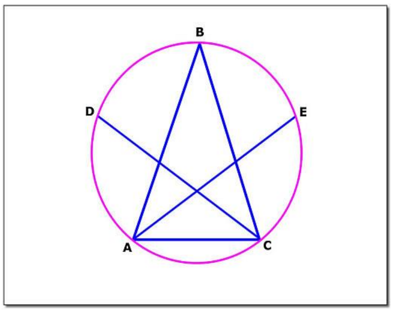


Figura 37 - Dividindo a circunferência em cinco arcos iguais
Fonte: http://www.bpiropo.com.br.

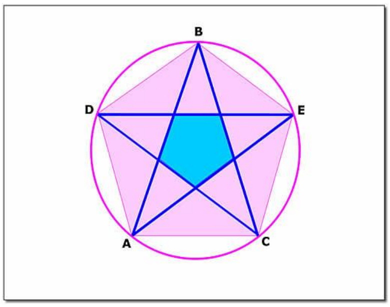


Figura 38 - O pentagrama
Fonte: http://www.bpiropo.com.br.

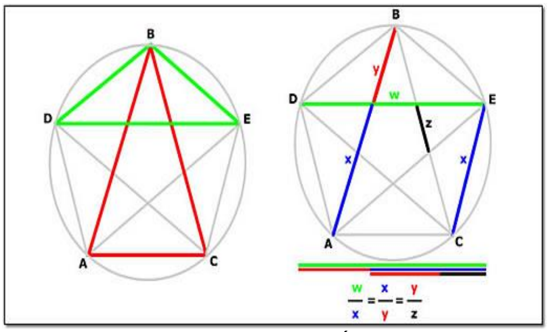


Figura 39 - Razões Áureas
Fonte: http://www.bpiropo.com.br.

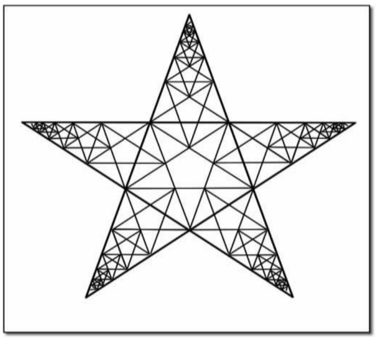


Figura 40 - Estrela Pitagórica
Fonte: http://www.bpiropo.com.br.

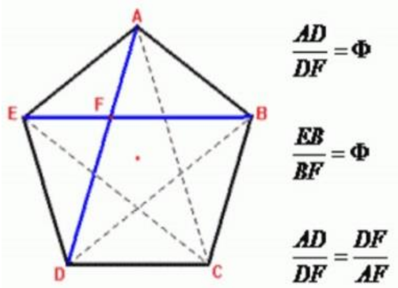


Figura 41 - No Pentagrama, o ponto F[10]
Fonte: http://drkleilton.com.br/proporcao.

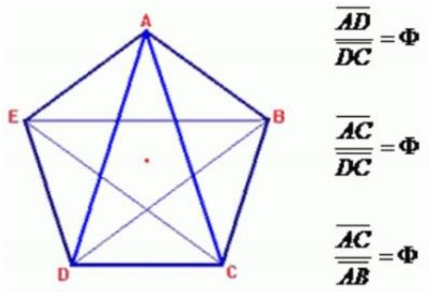


Figura 42 - No Pentagrama, as medidas das diagonais.[11]
Fonte: http://drkleilton.com.br/proporcao.

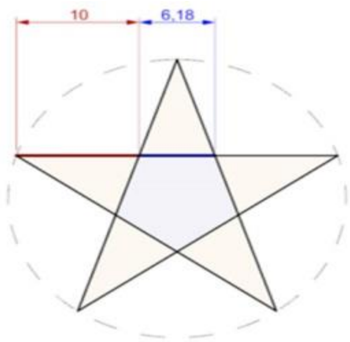


Figura 43 - Segmentos do pentagrama na proporção áurea.
https://pt.wikipedia.org/wiki/Propor%C3%A7%C3%A3o_%C3%A1urea.

[10] Ponto de intersecção entre as duas diagonais, divide cada uma delas na razão áurea.
[11] As medidas das diagonais estão em razão áurea com as medidas dos lados do pentágono.

Figura 44 – Laço Infinito
Fonte: https://sites.google.com/site/dodavidbe zerragospel/ simbolos-satanicos/pentagrama---significado.

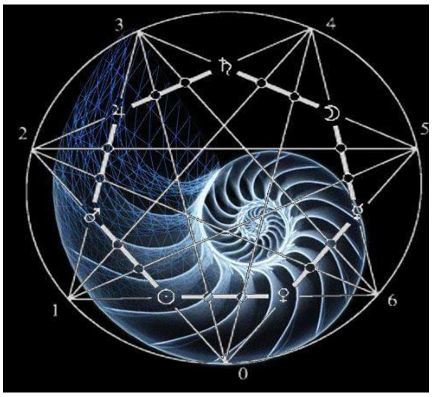


Figura - 45 – Foto de La Gran Geometria - Imagem de Geometria Sagrada
Fonte: https://www.facebook.com/177763279257037/photos/pb.177763279257037.-2207520000.1460951453./212414769125221/?type=3&theater

A estrela de cinco pontas, também chamada geralmente de pentagrama, foi usada durante milhares de anos por uma grande variedade de culturas. Seu uso na sociedade ocidental descende das tradições ocultas ocidentais. Ela é a forma mais simples de estrela, que deve ser traçada com uma única linha, sendo consequentemente chamada de "Laço Infinito".

Em tempos medievais, o "laço infinito" era o símbolo da verdade e da proteção contra demônios. Era usado como um amuleto de proteção pessoal e guardião de portas e janelas. Os Templários, uma ordem militar de monges formada durante as Cruzadas, ganharam grande riqueza e proeminência através das doações de todos aqueles que se juntavam à ordem, e juntaram também grandes tesouros trazidos da Terra Santa. Na localização do centro da "Ordem dos Templários", ao redor de Rennes du Chatres, na França, é notável observar um pentagrama natural, quase perfeito, formado pelas montanhas que medem vários quilômetros ao redor do centro.[12]

Um pentagrama regular é obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular. O pentágono menor, formado pelas interseções das diagonais, também está na proporção com o pentágono maior, de onde se originou o pentagrama. A razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado da razão áurea. A razão entre as medidas das áreas dos dois pentágonos é igual à quarta potência da razão áurea.

Chamados de vértices de um pentagrama A, B, C, D e E, o triângulo isósceles formado por A, C e D, tem seus lados em relação dourada com a base, e, o triângulo A, B e C, tem sua base em relação dourada com os lados.[13]

2.1.3. Leonardo da Vinci: o grande mestre

Leonardo da Vinci nasceu em 1452. Para alguns historiadores, seu nascimento foi em Anchiano; para outros, foi entre as cidades italianas de Florença e Pisa. Ele faleceu na França no ano de 1519.

Reconhecidamente um dos mestres do Renascimento, ele teve enorme destaque nessa época, pela nobreza dos seus desenhos, revelando os seus conhecimentos matemáticos, assim como a utilização da razão áurea na propagação da perfeição, beleza e harmonia ímpar.

Da Vinci é, até hoje, considerado um dos maiores gênios da humanidade, além de grande pintor, cientista e inventor, dentre outras habilidades, com muitos projetos e tecnologia avançada para sua época.

Ele estudava o corpo humano, traduzindo fina habilidade, criatividade, inteligência e conhecimentos, em consonância com as artes, ciências e a matemática.

Chauveau, 1953, no livro *Léonard de Vinci,* comenta que:

> "Leonardo escreveu uma obra inestimável sobre o movimento, a percussão e o peso, e sobre todas as forças..." Leonardo pressente o princípio de

[12] Retirado do texto disponível em: https://sites.google.com/site/dodavidbe zerragospel/ simbolos-satanicos/pentagrama---significado.

[13] Trechos retirados de: http://paxprofundis.org/livros/1123/1123.htm.

> inércia. O estudo da matemática e da geometria torna-se fundamental para alimentar sua reflexão sobre um mundo suposto em equilíbrio harmonioso. (CHAUVEAU, 1953, p. 46).

Usando exaustivamente os seus conhecimentos de matemática, em especial, o número de ouro, nas suas obras de arte, ele nos proporcionou grandes obras que ainda são muito admiradas e estudadas nos tempos atuais. Citaremos, como exemplo de harmonia e perfeição, um dos mais famosos estudos na arte e na matemática, o desenho do Homem Vitruviano.

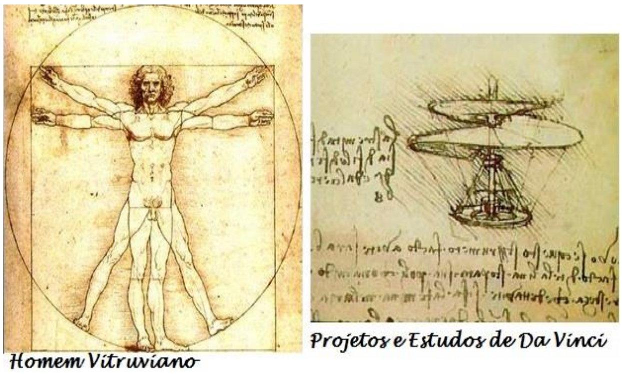


Figura 17 - O Homem Vitruviano, projetos e estudos de Leonardo da Vinci.
Fonte: http://www.pinturasemtela.com.br/wp-content/uploads/2011/05/homem-vitruviano-Leonardo-da-Vinci.jpg

Nessa obra, Leonardo da Vinci, combinando precisão e inteligência, fez estudos árduos, extensos e exaustivos em relação às proporções do corpo humano. O número de ouro se fez presente na razão entre muitas distâncias descritas em nosso corpo.

Através dessa obra, podemos observar algumas razões que resultam no primeiro número irracional, conhecido pelo homem e com um valor aproximado de 1,618, o famoso número áureo.

Conseguimos perceber isso entre a distância do umbigo até o tronco, vemos isso nos braços esticados, como mostrado na figura acima, na distância do tronco até o topo da cabeça, também entre a distância do tronco até as sobrancelhas e a distância das sobrancelhas até o topo da cabeça.

Podemos continuar a explorar tal proporção em várias outras partes do corpo, pois muitas outras intervenções podem ser inferidas nessa obra genial.

Passeando pela obra Mona Lisa, de Leonardo da Vinci, mais uma vez, percebemos a relação da arte com a matemática.

Nessa obra também podemos observar representações da aplicação dos retângulos áureos como parâmetro de harmonia, evidenciando a proporção áurea, em várias partes do corpo de Mona Lisa, como da altura do pescoço até o final do busto, e da altura deste até as suas mãos.

Ao construir um retângulo em torno de seu rosto, veremos a proporção do retângulo áureo, e ao subdividir este retângulo usando a linha dos olhos, traçando uma reta horizontal, teremos novamente a proporção áurea.

Com vistas à perfeição em seus quadros, ele não poupou criatividade, beleza e harmonia através de retângulos áureos, na sua mais famosa criação.

Ainda na mesma obra, teremos novamente o mesmo retângulo, ao traçar uma linha horizontal na altura do eixo dos olhos da imagem, subdividindo-a em um quadrado e um retângulo áureo, como mostraremos nas figuras abaixo.

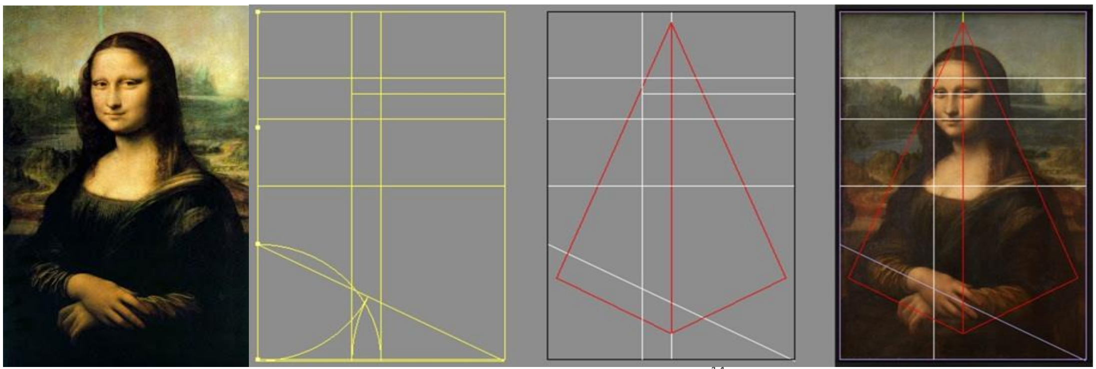


Figura 18 - A pintura da Mona Lisa.[14]
Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Mona_Lisa, web.archive.org/web/20150724161835 e www.aloartista.net/conteudo.asp?id=1692.

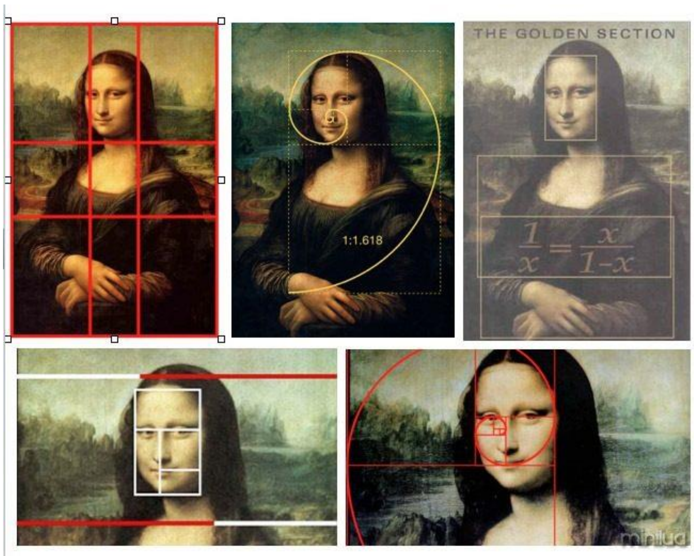


Figura 19 – A Mona Lisa[15]
Fonte:https://www.google.com.br/search?hl=ptBR&site=imghp&tbm=isch&source=hp&biw=1067&bih517&q=monalisa&oq=mona&gs_l=img.1.0.0l10.3130.3792.0.7007.4.4.0.0.0.0.198.569.0j3.3.0....0...1ac.1.64.img..1.3.567.zsFKcRRz1yM#hl=ptBR&tbm=isch&q=monalisa+e+a+raz%C3%A3o+%C3%A1urea&imgrc=nSZnJYlVBjp0bM%3A.

---

[14] A pintura da Mona Lisa, o grid geométrico, a forma piramidal e a sobreposição analítica das linhas.
[15] Algumas representações da aplicação de retângulos áureos como parâmetro de harmonia

CAPÍTULO 3

3.1. O segmento áureo

O número áureo pode ser obtido por meio de um segmento, seguindo a definição: se um ponto divide um segmento de reta em média e extrema razão, se o mais longo dos segmentos é uma média geométrica entre o menor e o segmento todo, então a razão do segmento menor com o segmento maior é a razão áurea[16].

Figura 20 - Segmento Áureo.
Fonte: http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/aureo.pdf.

Pelo estudo das proporções, podemos estabelecer que, como $\frac{u}{u} + \frac{v}{u} = \frac{u}{v}$

Substituindo $\frac{v}{u} = x$, temos:

$$\frac{u}{u} + \frac{v}{u} = \frac{u}{v}$$

$$1 + \frac{1}{x} = x$$

$$x + 1 = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Essa equação apresenta duas raízes reais, que são:

$$x' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong 0.618$$

e

$$x'' \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.618 = \text{Phi}.$$

E, portanto, a relação u/v representa o segmento áureo.

16 http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/aureo.pdf.

3.2. Pentágono regular e o triângulo áureo

Um pentágono é chamado de regular quando possui os cinco lados e ângulos iguais. E, para sabermos o valor de cada ângulo interno de um pentágono regular, é necessário que saibamos primeiro o valor da soma dos internos, que pode ser encontrado através da formula 180. (n – 2), para um polígono qualquer, onde n é o número de lados.

Como o pentágono tem cinco lados iguais, então, para n = 5, teremos que a soma dos ângulos internos será 540 graus. Assim, o valor de cada ângulo interno do pentágono é 108 graus, ou seja, 540/5.

Partindo de sua estrutura, um triângulo é um polígono que possui: três lados, três vértices e três ângulos internos.

Podemos classificar os triângulos de acordo com a medida dos seus lados e a medida de seus ângulos. Assim, em relação aos seus lados, temos: o triângulo equilátero, cujos lados são do mesmo tamanho ou de mesma medida; o triângulo isósceles, que possui pelo menos dois lados com medidas iguais; e o triângulo escaleno, que possui os três lados com medidas diferentes. E, com relação aos ângulos internos, temos: o triângulo acutângulo, que possui todos os ângulos com medidas menores que 90 graus (agudos); o triângulo retângulo, que possui um ângulo com medida igual a 90 graus (reto); e triângulo obtusângulo, que apresenta um ângulo interno maior que 90 graus (obtuso).

Um triângulo áureo agudo é um triângulo isósceles cuja medida c de suas laterais, dividida pela medida d de sua base, é igual ao número de ouro.

Um triângulo isósceles tem a soma dos seus ângulos igual a 180 graus, ou seja, o triângulo que iremos trabalhar possuirá ângulos de 36 graus, 72 graus e 72 graus, com pelo menos dois lados iguais.

Se pegarmos um pentágono regular ABCDE e traçarmos as duas diagonais partindo de A, formaremos três triângulos isósceles. Os dois primeiros isósceles são os triângulos ADE e ABC, os dois lados iguais desses triângulos são os lados do pentágono. O outro triângulo isósceles é o ACD, pois os lados iguais desse triângulo são as duas diagonais do pentágono.

Se traçarmos a bissetriz de um ângulo da base até o lado oposto, formando outro triângulo, poderemos notar que o novo triângulo possuirá os mesmos ângulos do triângulo anterior e, portanto, eles são semelhantes[17].

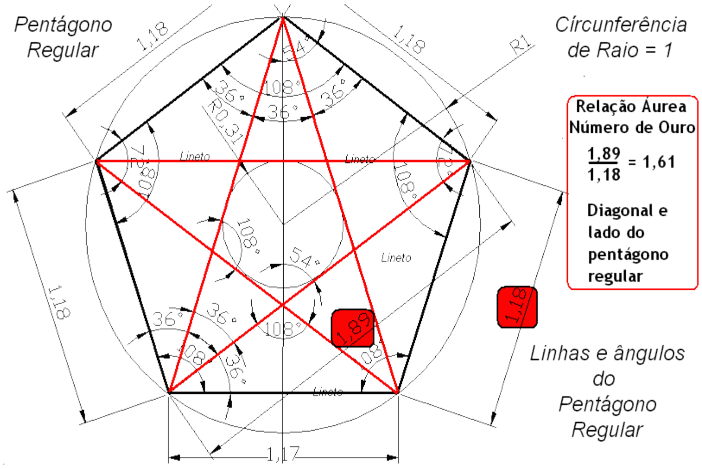


Figura 21 - Linhas e ângulos do Pentágono Regular
Fonte: http://caraipora2.tripod.com/flor_de_cera_.htm.

Considerando agora somente o triângulo isósceles ACD e traçando a bissetriz interna do ângulo D desse triângulo, essa bissetriz vai interceptar o lado AC no ponto F.

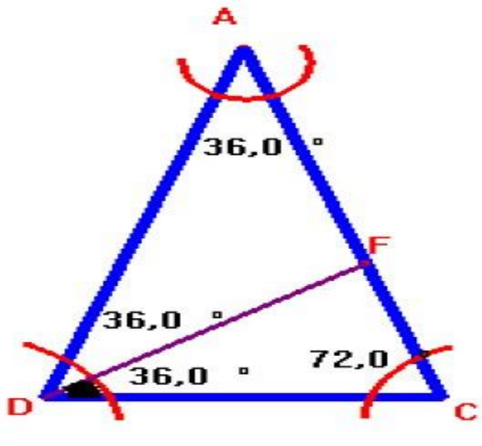


Figura 22. Triangulo Isósceles ACD
Fonte: http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1149/2012_00930_NILO_PINHEIRO_LANDIM.pdf?sequence=1.

Podemos observar que o triângulo CDF também é isósceles, pois, como $\overline{DF}$ é bissetriz, então o ângulo D interno nesse triângulo mede 36 graus e, como o ângulo interno C desse triângulo mede 72 graus, logo o ângulo interno F desse triângulo também medirá 72 graus, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo tem que

[17] Landim, Nilo Pinheiro. Razão áurea: expressando a beleza desse número para o ensino médio. / Nilo Pinheiro Landim. -- Mossoró, 2014 70f.: il.

medir 180 graus. Então, o triângulo CDF também é isósceles, com os lados iguais sendo $\overline{CD}$ e $\overline{DF}$.

Se observarmos os triângulos ACD e DFC, notaremos que o ângulo C será comum aos dois triângulos, o ângulo D interno do triângulo CDF é igual ao ângulo A interno do triângulo ACD, logo, os três ângulos são iguais.

Então, esses dois triângulos são semelhantes.

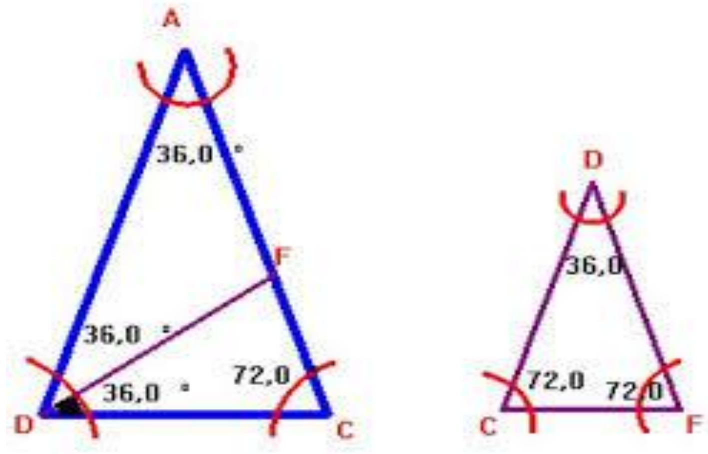


Figura 23 - Triângulos Isósceles ACD e DFC
Fonte: http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/aureo.pdf.

Como esses dois triângulos são semelhantes, então se pode atribuir a relação de semelhança:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CF}}$$

Como os dois triângulos ADF e CDF são isósceles, então $\overline{CD} = \overline{DF} = \overline{AF}$. E, a partir das duas igualdades, encontramos que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{CF}}$$

Se observarmos mais uma relação, ela significa que o ponto F divide a linha $\overline{AC}$ pela razão áurea, pois esta relação nada mais é do que a definição geométrica da razão áurea no lado $\overline{AC}$.

Portanto, o triângulo ADC é chamado de triângulo áureo.

3.3. Retângulo áureo

Um retângulo é chamado de áureo quando a razão entre o lado maior e o lado menor é justamente o (Φ), ou seja, 1,6180...

Pode-se definir como retângulo áureo qualquer retângulo que, sendo retirado deste um quadrado qualquer, terá como restante outro retângulo semelhante ao primeiro.

Observe os passos abaixo, usados para fazer a construção de um retângulo que pode ser considerado como áureo, a partir de um segmento qualquer $\overline{AB}$.

Para melhor entendimento, com a medida de um segmento $\overline{AB}$ determinado, construa um quadrado ABCD de lado medindo $\overline{AB}$.

01 – Vamos construir um quadrado qualquer.

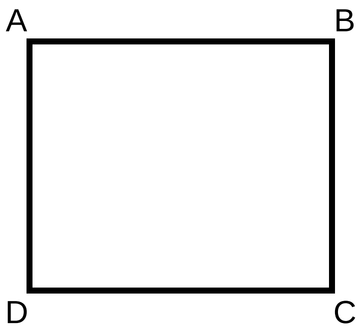


Figura 24 - Quadrado ABCD
Fonte: Elaborada pelo autor

02 – Depois, vamos dividir esse quadrado ao meio.

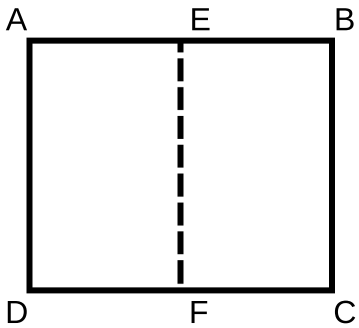


Figura 25 - Quadrado ABCD com pontos médios em E e F
Fonte: Elaborada pelo autor

03 – Vamos desenhar uma linha perpendicular.

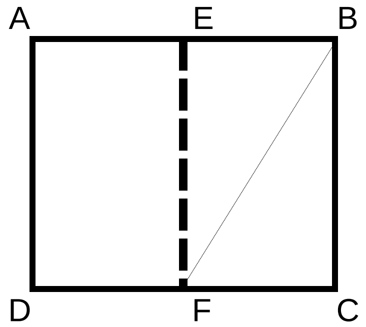


Figura 26 - Diagonal $\overline{FB}$ do retângulo EBDF
Fonte: Elaborada pelo autor

04 – Depois, vamos girar esta linha até a base do retângulo.

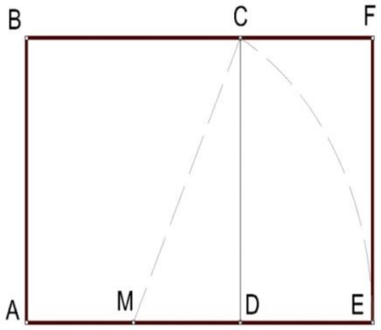


Figura 27 - Construção geométrica do segmento áureo a partir de um quadrado
Fonte: http://oitavabilateral.blogspot.com.br/2013_03_01_archive.html.

Seja M o ponto médio do segmento AD. Com o compasso centrado (ponta-seca) em M, traçar o arco CE, sendo D um ponto da reta AD e D pertence ao segmento AE.

O ponto D divide o segmento AE em média e extrema razão (razão áurea).

Pode-se, ainda, construir um decágono regular inscrito em uma circunferência.

A construção do lado de um decágono (l10) é equivalente à construção de um arco de medida de 36°, isto é, equivalente à décima parte de uma circunferência dada.

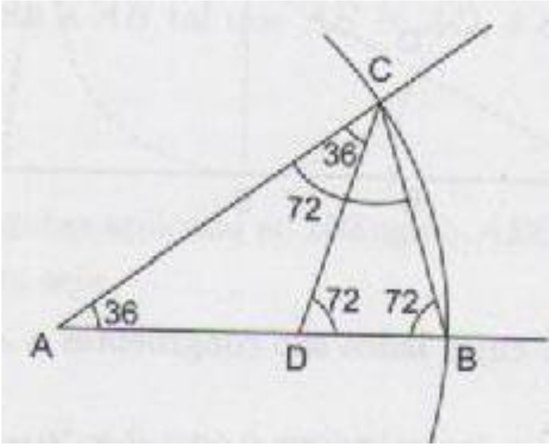


Figura 28 - Decágono e razão áurea
Fonte: Rezende e Queiroz, 2008, p.164

O triângulo isósceles ABC, cujo ângulo da base mede 72 graus, é chamado de triângulo áureo. Observa-se que a razão de semelhança entre o triângulo ABC e o triângulo CDB é a razão áurea.

Seja o segmento CD congruente ao segmento BC, com D pertencente a AB. Logo, ambos são congruentes ao lado l10 do decágono regular inscrito.

O triângulo CDB é, então, isósceles e tem por base o segmento DB. Dessa forma, m(CDB) = 72 graus.

Logo, os triângulos ABC e CDB são semelhantes. Assim sendo, vale a relação AB/CB = CB/DB.

O triângulo ADC, por sua vez, é isósceles com base AC, tendo em vista que m(ACD) = 36 graus = m(CÂD).

Assim, tem-se que m(AD) m(CD) m(l10). Isto mostra que r/m(l10) = m(l10)/(r – m(l10).Logo, l10 é o segmento áureo do raio da circunferência inicial.

Simbolicamente:

m $(l_{10}) = r\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$.[18]

[18] Trechos retirados de: Souza, Alexandre Ramon. Razão áurea e aplicações: contribuições para a aprendizagem de proporcionalidade de alunos do 9o ano do Ensino Fundamental. 147 f.: il.; grafs.; tabs.

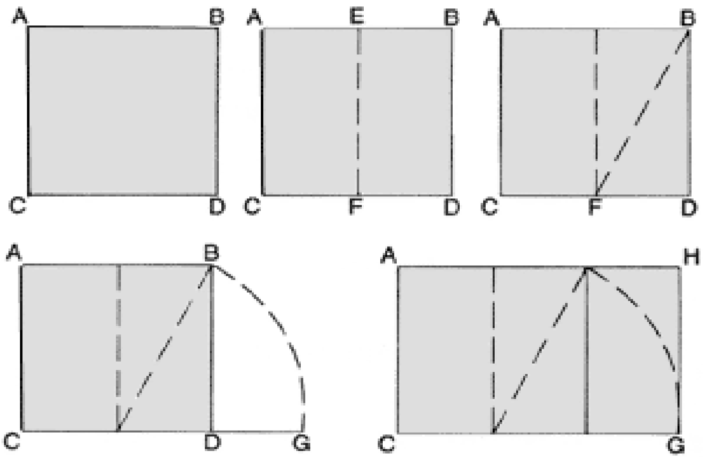


Figura 29 - O Retângulo Áureo e suas peculiaridades
Fonte: https://uspdigital.usp.br/siicusp/cdOnlineTrabalhoVisualizarResumo?numeroInscricaoTrabalho=881&numero Edicao=14

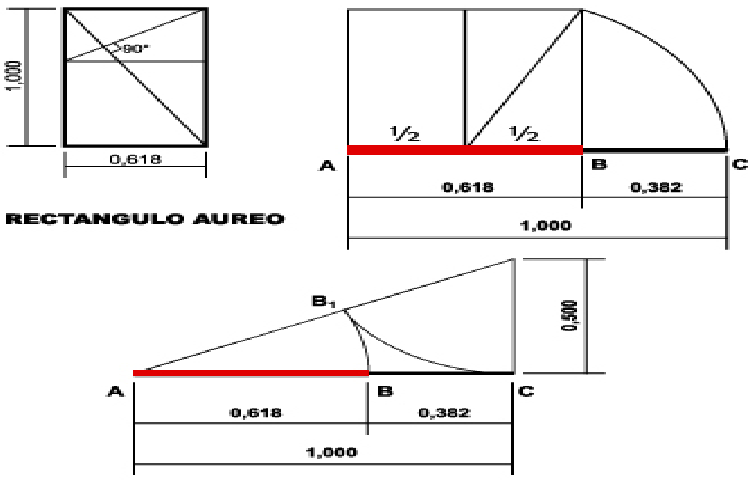


Figura 30 - Retângulo de Ouro ou Harmônica
http://disenoambiental1.blogspot.com.br/2010/07/22.html

3.4. Espira logarítmica

Na matemática, espiral é uma curva plana que gira em torno de um ponto central ou polo, dele se afastando ou se aproximando. Ela é chamada de dextrogira, se voltar para a direita, e de sinistrogira ou levogira, se voltar para a esquerda. A espira logarítmica é também chamada de equiângular, pois corta todos os raios vetores sob o mesmo ângulo e é uma curva gerada por um ponto que caminha em torno de um polo.

O ponto se desloca no raio vetor em progressão geométrica, enquanto o raio polar gira em torno do polo em progressão aritmética numa sucessão de ângulos iguais[19].

Observando a espira logarítmica, destacamos abaixo:

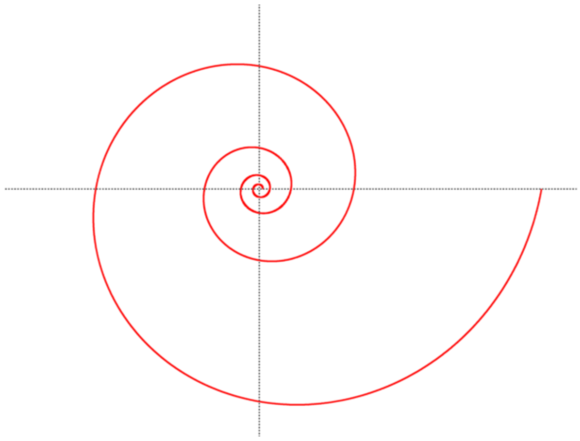


Figura 31 - Espiral Logarítmica
Fonte: http://www.wikiwand.com/pt/Espiral

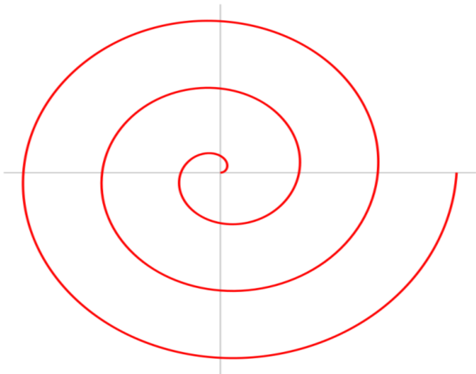


Figura 32 - Espiral de Arquimedes
Fonte: http://www.wikiwand.com/pt/Espiral

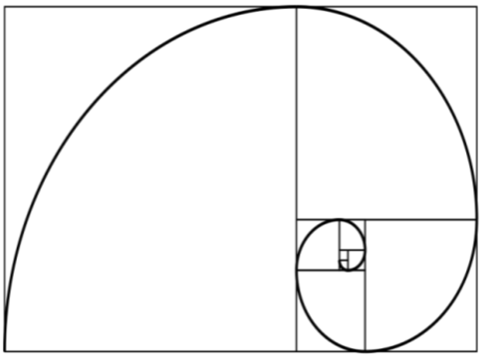


Figura 33 - Espiral de Fibonacci
Fonte: http://www.wikiwand.com/pt/Espiral.

[19] Trechos retirados de: http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/aureo.pdf. e https://uspdigital.usp.br/siicusp/cdOnlineTrabalhoVisualizarResumo?numeroInscricaoTrabalho=881&numero Edicao=14

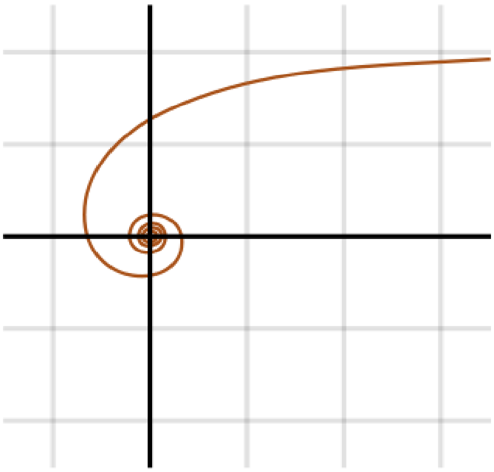


Figura 34 - Espiral Hiperbólica
Fonte: http://www.wikiwand.com/pt/Espiral

4. Considerações finais

No momento em que me propus a conhecer e trabalhar com a razão áurea, não imaginava, exatamente, o tamanho ou dimensão desse desafio.

Tampouco tinha a noção de que esse era um assunto rico, vasto, alucinante e quase desconhecido para os alunos da Educação Básica e do Ensino Médio.

No decorrer das pesquisas feitas em livros e nos sites da internet, pude entender que a razão áurea está em todo lugar, com características únicas.

Também consegui observar que é um assunto capaz de despertar grande entusiasmo nas pessoas e que essa razão mágica não é exclusividade da matemática, mas está presente em todas as áreas de conhecimento.

Dentre as várias áreas do conhecimento, tentando desvendar os mistérios da razão áurea, presenciamos as suas aplicações na natureza, no corpo humano, nas artes, na sequência de Fibonacci e na matemática, com seus retângulos áureos, triângulos, pentágonos e a divisão de uma reta em dois segmentos, relações numéricas e geométricas, razão e proporção. Também na literatura e suas composições, na música com suas melodias e seus acordes harmônicos, até a arquitetura diversificada nas pirâmides, no Templo de Parthenon, dentre outras, não podendo deixar de vislumbrar os trabalhos de artes e outros de cunho científico de Leonardo da Vinci, no Renascentismo, dos grandes mestres do Egito, das descobertas do povo pré-histórico, de Pitágoras e suas abordagens sobre os números.

Não temos como precisar a quantidade de aplicações e eventos possíveis para essa proporção, chamada de razão áurea, razão divina ou proporção divina, mas, podemos sentir a sua harmonia perfeita, provocando a sensação singela de leveza, beleza e diversidade, entrelaçando-se com a concepção de estética, com a capacidade de quantificar e qualificar a beleza, nos revelando a realização de uma obra de alta perfeição e harmonia.

Logo, acredito que muito se tem para estudar, conhecer e divulgar o conceito da razão áurea, em nossas aulas, com o intuito de levar ao aluno o desejo de aprender, distinguir e perceber o quanto essa proporção divina faz parte de nossas vidas, nosso cotidiano, na interdisciplinaridade de conteúdos e áreas que nem sempre percebemos ou distinguimos.

5. Bibliografia

BOYER, Carl B. *História da matemática*/Carl B. Boyer, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 2.ed. São Paulo: Edgard Blücler,1996.

CHAUVEAU, Sophie. *Léonard da Vinci* / Sophie Chauveau ; tradução de Paulo Neves. Porto Alegre, RS: L&PM, 2012. (Coleção L&PM POCKET Biografias; v. 877).

TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. 83ª ed. - Rio de Janeiro: Record. 2013.

TAHAN, Malba. *As maravilhas da Matemática*. Segunda edição brasileira: 1973. Rio de Janeiro. Bloch Editores S. A.

Antiguidade. Disponível em: <https://www.somatatica.com.brhistoria.php>. Acesso em 22/03/2016.

Design com Proporção Áurea: Por quê usar? Mario Piva. Disponível em: <http://movadesign.com.br/design-com-proporcao-aurea-por-que-usar/>. Acesso em 15/08/2016.

História da Álgebra. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/algebra.php>. Acesso em 10/03/2016.

Landim, Nilo Pinheiro. Razão áurea: expressando a beleza desse número para o ensino médio. / Nilo Pinheiro Landim. -- Mossoró, 201470f. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1149/2012_00930_NILO_PINHEIRO__LANDIM.pdf?sequence=1>. Acesso em 22/03/2016.

Leandro de Oliveira Sodré. O número 142857 e o número de Ouro.: curiosidades, propriedades matemáticas e propostas de atividades didáticas. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/174/201100034_LEANDRO DE_OLIVEIRA_SODRE.pdf?sequence=1>. Acesso em 03/09/2016.

O número de Ouro. Roberto Menegassi Jr. Disponível em: <http://oitavabilateral.blogspot.com.br/2013_03_01_archive.html>. Acesso em 03/09/2016.

O número de Ouro como instrumento de aprendizagem significativa no estudo dos números irracionais. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/cultura_matematica_%20numero%20_%20ouro%20.pdf>. Acesso em 03/09/2016.

O número de Ouro: Representação da beleza matemática. Cristiano Gonçalves Augusto. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_CristianoGon%E7alves.pdf>. Acesso em 03/09/2016.

Souza, Alexandre Ramon. Razão áurea e aplicações: contribuições para a aprendizagem de proporcionalidade de alunos do 9o ano do Ensino Fundamental. Disponível em: <www.repositorio.ufop.brbitstream1234567893468 1DISSERTA%C3%87%C3%83O_Raz%C3%A3o%C3%81ureaAplica%C3%A7%C3%B5es.pdf> Acesso em 15/08/2016.