UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI – UFSJ

NÚCLEO DE EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – DEMAT

MÁRCIO ANTÔNIO FULINI

HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

SÃO JOÃO DEL-REI

2016

MÁRCIO ANTÔNIO FULINI

HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática a Distância, da Universidade Federal de São João Del-Rei.

Orientador: Profa. Andréia Malacarne

SÃO JOÃO DEL-REI

2016

MÁRCIO ANTÔNIO FULINI

HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

.

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática a Distância, da Universidade Federal de São João Del-Rei.

Os componentes da banca de avaliação, abaixo identificados, consideram este trabalho aprovado.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof.ª Dr. (nome)

(Instituição)

____

Prof.º Dr. (nome)

(Instituição)

Data da aprovação: São João del-Rei, ____ de _________________ de _____.

"Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência".

(Irene de Albuquerque)

Dedico este trabalho a minha filha Pâmela, por todo sofrimento que estamos passando devido a leucemia. Se Deus aprouver pela sua graça, sua bondade e sua misericórdia para que consigamos em nossa família um doador compatível e que este transplante de medula seja abençoado.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida.

A meus pais (In memoriam).

À professora Andréia Malacarne pela dedicação na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão deste trabalho TCC.

Aos meus amigos: David, Eliane, Marcos, Nilson e Roseli. Valeu!

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo um estudo da história do Cálculo Diferencial e Integral, através de pesquisa bibliográfica. O Cálculo Diferencial e Integral é uma poderosa ferramenta matemática utilizada nas mais variadas áreas da ciência, e por isso está presente na grade curricular básica de muitos cursos de graduação, tais como: Engenharias, Física, Química, entre outros; e está fundamentado nos conceitos de limite, derivada e integral. A história da Matemática é antiga, quase como a própria história da humanidade; remonta a povos que após inventar a escrita e a se fixar na terra necessitaram vencer a natureza, e com isso desenvolveram a tecnologia e a Matemática. Os conceitos de Cálculo são estudados pela humanidade há séculos, na busca de soluções de problemas envolvendo áreas e tangentes. Esses conceitos foram sendo aperfeiçoados ao longo do tempo. Grandes nomes deram suas contribuições ao avanço do Cálculo, tais como Arquimedes, Kepler e Fermat. No século XVII, Newton e Leibniz chegaram, de forma independente, a importantes resultados no campo do Cálculo, e por isso, são considerados os criadores do Cálculo. Após Newton e Leibniz, outros grandes nomes da Matemática também contribuíram para o aperfeiçoamento da teoria, como: L'Hospital, Lagrange, D'Alembert, Cauchy, Weierstrass e Riemann.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral. História do Cálculo.

ABSTRACT

The aims of this work is to study of the history of differential and integral calculus, through literature. Differential and Integral Calculus is a powerful mathematical tool used in various areas of science, and therefore is present in the basic curriculum of many undergraduate courses such as Engineering, Physics, Chemistry, among others; and it is based on the concepts of limit, derivative and integral. The history of mathematics is old, almost like the history of mankind; dates back to people after inventing writing and settles on the ground needed to win the nature, and it developed the technology and mathematics. Calculation of the concepts are studied by mankind for centuries, the search for solutions to problems involving areas and tangents, and were being perfected over time. Big names have given their contributions to the advancement of the calculation, such as Archimedes, Kepler and Fermat. In the seventeenth century, Newton and Leibniz arrived independently, important results in calculation of the field, and therefore are considered the creators of the calculation. After Newton and Leibniz, other great names of mathematics also contributed to the improvement of the theory, such as: L'Hospital, Lagrange, D'Alembert, Cauchy, Weierstrass and Riemann.

Keywords: Differential and integral calculus. History of calculation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral é uma das disciplinas mais tradicionais nos cursos de graduação na área das Ciências Exatas, e está presente na grade curricular básica de muitos cursos, tais como: Engenharias, Física, Química, Ciência da Computação, entre outros. Sua descoberta tem contribuído para a evolução de diversas outras ciências. Isto ocorre porque o Cálculo Diferencial e Integral é uma poderosa ferramenta matemática utilizada na resolução diversos problemas envolvendo várias áreas do conhecimento.

Segundo Eves (2012, p. 462), o Cálculo, apoiado pela Geometria Analítica, foi o maior instrumento matemático descoberto no século XVII. Ele se mostrou notavelmente poderoso e eficiente para solucionar problemas que antigamente não conseguiam resolver.

Em vista disso, a construção dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral se deu graças às várias contribuições de diversos matemáticos em diferentes períodos históricos. Cada matemático, ao seu tempo, desenvolveu novos métodos e aperfeiçoou as ideias para o estudo e a aplicação do Cálculo em diferentes áreas do conhecimento. Segundo Melchiors e Soares (2013), os primeiros registros datam de 1.800 a.C., e desde a antiguidade, grandes nomes, como Arquimedes, Kepler e Fermat, deram suas contribuições, até que no século XVII, Newton e Leibniz chegaram, de forma independente, à fórmula para utilizar o Cálculo de maneira funcional. Após Newton e Leibniz, diversas outras personalidades matemáticas trabalharam para aperfeiçoar os conceitos, como os irmãos Bernoulli, L'Hospital, Lagrange, D'Alembert, Cauchy, Weierstrass e Riemann.

O desenvolvimento dos conceitos de Cálculo ocorreu na ordem inversa àquela que é usualmente apresentada nas disciplinas de Cálculo e nos livros didáticos. O Cálculo Integral surgiu muito antes que o Cálculo Diferencial. (THOMAS; et. al., 2012. p. 417).

A ideia da integração teve origem em processos somatórios, ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. (EVES, 2011, p. 417).

Segundo Godoy e Faria (2012), tem ocorrido um alto índice de reprovações nas disciplinas de Cálculo nos cursos de graduação que têm essa disciplina na grade curricular, o que tem se tornado uma rotina e considerado como um fator natural para professores e alunos. Para Gomes (2012, p. 1), isto acontece devido à disciplina de Cálculo I ser ministrada no início do curso, sendo um primeiro contato para os alunos como uma Matemática muito diferente das quais formam trabalhadas no Ensino Médio. Garzella (2013), em sua pesquisa publicada no Jornal da UNICAMP, onde assistiu as aulas de um semestre de Cálculo I como observadora, levantou um histórico de doze anos (1997 a 2009) de informações relativas à disciplina que constataram taxas de até 77,5%, que incluíam reprovações e evasões dos estudantes.

A história da Matemática é de grande valia no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Através dessa ferramenta, o professor tem a possibilidade de tornar suas aulas mais contextualizadas, mais integrada com as outras disciplinas, incentivando o aluno à pesquisa. Com isso, o aluno reconhecerá que a Matemática surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano, conhecerá em diferentes momentos históricos e as preocupações dos vários povos, e conforme Portanova (2004, p. 01), também conseguirá fazer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

Segundo Schender (2013, p. 10), a história é um instrumento importantíssimo para explicar a origem dos vários axiomas, conceitos, fórmulas, postulados, enfim, situando o aluno no tempo e no espaço e contextualizando o assunto estudado.

De acordo com Gasperi e Pacheco (2012, p. 03), a história da Matemática pode estar presente na sala de aula em vários contextos diferentes, pode ser apresentada de forma lúdica com problemas curiosos, "os enigmas", como fonte de pesquisa e conhecimento geral, como introdução de um conteúdo ou atividades complementares de leitura, trabalho em equipe e apresentação para o coletivo.

Diante do exposto, este trabalho tem como objetivo principal apresentar o desenvolvimento histórico da construção dos conceitos estudados nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral: limite, derivada e integral.

Este trabalho será feito através de uma pesquisa qualitativa, a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, trabalhos de conclusão de cursos, páginas na internet.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: no primeiro capítulo, falaremos brevemente sobre a história da Matemática. No segundo capítulo, trataremos sobre o Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de graduação, apresentando uma breve introdução aos conceitos que compõem a disciplina: limite, derivada e integral. Já no Capítulo 3, apresentaremos as ideias dos principais matemáticos e estudiosos, no contexto histórico, desde a antiguidade, passando pelos matemáticos Newton e Leibniz, considerados os inventores do Cálculo, até chegar a Idade Contemporânea.

1 – CONHECENDO A MATEMÁTICA NA HISTÓRIA

Os primeiros habitantes da terra viviam da caça e coleta de frutas e raízes, eram nômades e se deslocavam a procura de alimento e pelas mudanças climáticas. Tudo era adaptado a caça e a religião era uma simples forma de entender a natureza obscura. Para sobreviver ao meio hostil à sua volta, o homem teve que se apropriar de processos mentais eficazes na solução dos problemas; e assim, surge a ciência, sendo a Matemática um dos primeiros campos do saber humano.

O encontro de objetos de formas definidas nos primórdios da humanidade já demonstrava o início da geometria, passando, assim, o homem a ultrapassar os limites impostos pela natureza. Essa mesma natureza obrigou os homens a grandes mudanças, pois os extensos períodos de seca e os animais escassos fizeram com que eles procurassem vales que ofereciam água. Dessa forma, homens e mulheres se fixaram nessa terra e se tornaram agricultores. Isso levou a uma espécie de "revolução agrícola", que precipitou profundas modificações culturais, como por exemplo a criação da escrita.

A necessidade de controlar as inundações e fazer a irrigação motivou o desenvolvimento da tecnologia e da Matemática concomitantemente, principalmente no Oriente Antigo. Essas atividades necessitavam do cálculo de um calendário, do desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, da criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios, para fazer a divisão de terras e instituir práticas financeiras e comerciais, como a arrecadação de taxas e os propósitos mercantis.

Os registros dos povos antigos são difíceis de localizar no tempo, pois o material usado era perecível, como casca de árvore e bambu. Os babilônios, por sua vez, usavam tábuas de argila cozida e os egípcios usavam pedras e papiros, o que felizmente era mais duradouro. Na região da Mesopotâmia foram encontradas tábulas estritamente matemáticas, que apresentavam listas de problemas. Muitos processos aritméticos eram efetuados com ajuda de várias tábulas, como por exemplo: de multiplicação, de inversos multiplicativos, de quadrados e cubos, e até mesmo de exponenciais...

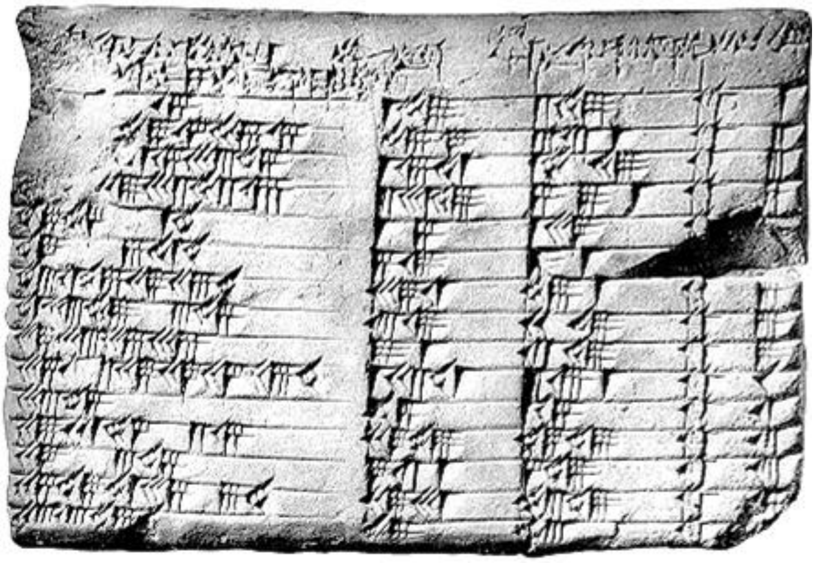

Figura 01: Tábula: Plimpton 322. Esta tábula é da coleção G. A. Plimpton da Universidade de Colúmbia, catalogada sob o número 322. A tábula foi escrita no período Babilônico Antigo (aproximadamente entre 1900 e 1600 a. C.). (EVES, 2011. p. 65).

A geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática, enquanto que a aritmética já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida, como as equações quadráticas. Conclui-se que os babilônios eram mais fortes em álgebra do que em geometria. É impressionante a profundidade e a diversidade dos problemas considerados por eles. (EVES, 2011, p. 60-63).

Conforme Eves (2011, p. 63-71), contrariamente à opinião popular, a Matemática no Egito antigo nunca alcançou o nível obtido pela Matemática babilônica. Não obstante, até que se decifrassem tantas tábulas matemáticas babilônicas, o Egito foi o mais rico campo de pesquisa histórica sobre a antiguidade. Isso se deu pela construção de tumbas e templos, como as famosas pirâmides, e a preservação de muitos papiros, que de outra forma teriam perecido; como por exemplo, um papiro de 1650 a.C., contendo 85 problemas copiados em escrita hierática de um trabalho mais antigo, que descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para os problemas da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da Matemática a problemas práticos.

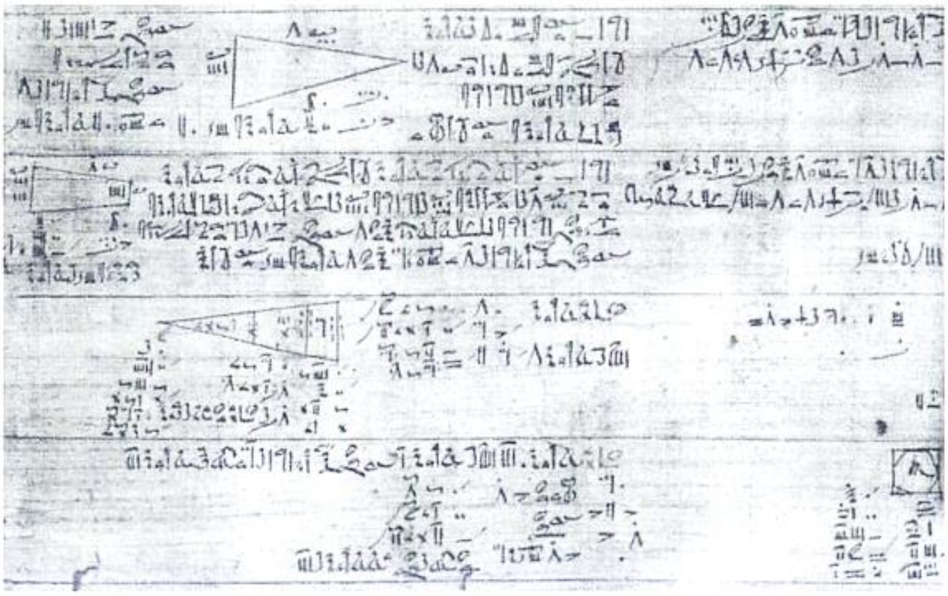

Figura 02: Trecho do Papiro de Ahmes. Circa – 1650 a. C. (Museu Britânico). (EVES, 2011. p. 74).

Os gregos antigos faziam distinção entre o estudo das relações abstratas envolvendo os números e arte prática de calcular com os números. Esta era conhecida como logística e aquela como aritmética. Os gregos antigos já faziam cálculos de áreas e volumes de figuras. Com isso, um dos grandes desafios para os matemáticos daquele período era o cálculo da quadratura de figuras curvas. (EVES, 2011, p. 98-100).

Os primeiros problemas da história do Cálculo diziam respeito ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. Papiros egípcios e tábuas babilônicas já tratavam certos problemas de mensuração. Embora tais regras fossem aceitas, não havia uma prova rigorosa para as mesmas.

Por conseguinte, o uso de símbolos e representações de objetos bem como a metodologia de construção do conhecimento matemático, pode ser entendida, em cinco períodos:

1 – O período empírico: que se confunde com os primórdios das civilizações. A Matemática está exclusivamente ligada à cultura e à sociedade da época. Um exemplo clássico é a Geometria no Egito Antigo, que estava associada à medição dos campos depois das cheias do rio Nilo e construção de pirâmides.

2 – O período dedutivo: inicia-se com o nascimento da filosofia grega no século VI a. C., no momento em que ocorre a ruptura entre o prático e o teórico, entre o concreto e o abstrato. A força de uma ideia passa a estar na sua forma, na Lógica. Um exemplo marcante desse período foi Euclides de Alexandria, em 300 a. C.

3 – O período racional: se inicia com o advento da Ciência Moderna, no século XVII. O conhecimento matemático, incluído o procedimento dedutivista, passou a explicar e a justificar os fenômenos observados. Newton e Leibniz criam o Cálculo Diferencial e Integral, para dar explicações aos fenômenos que estão sendo estudados em sua época.

4 – O período simbólico: inicia-se no século XIX, com os trabalhos de Frege e depois Russell. Esta fase do desenvolvimento do conhecimento matemático apresenta três tendências: Logicismo (a Matemática depende da lógica), Intuicismo (a Matemática deve ser aceita pela sua evidência e o princípio do terceiro excluído) e o Formalismo (estuda as estruturas matemáticas, e a partir de uma desenvolve-se outras, por semelhança).

5 – O período simulatório: com o advento do computador, a Matemática tem mostrado sua ampla aplicabilidade, através da criação de modelos aplicados às diferentes áreas do conhecimento, desde a linguística até a teoria do caos. O computador nasceu graças a Matemática e ciências afins, e ele “não é senão um instrumento matematizador de informações” (ALMEIDA, 1988. p. 59).

2 – O ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA GRADUAÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral é uma parte muito importante da Matemática, muito diferente do que o aluno ingressante na Universidade já estudou, pois o Cálculo é dinâmico e trata de variação, de movimento, de quantidades que mudam e que dependem de outras quantidades, sendo considerado, por muitos, uma das grandes realizações do intelecto humano.

As ferramentas modernas do Cálculo Diferencial e Integral permitem uma ampliação da percepção do comportamento do sistema descrito por funções aplicados em problemas práticos do cotidiano. Por isso, as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral fazem parte do currículo básico de muito cursos de graduação, como Engenharias, Física, Química, Estatística, Ciências da Computação, entre outros.

O Cálculo é fundamentalmente diferente da Matemática que o aluno já estudou. O Cálculo é menos estático e mais dinâmico. Ele trata de variação e de movimento, bem como de quantidades que tendem a outras quantidades. (STEWART, 2012. p. 28).

As disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I são, de forma simplificada, apresentadas em três partes (e nessa sequência): estudo de limite, derivadas e integrais de funções de uma variável.

A seguir, apresentaremos uma breve introdução dos conceitos básicos estudados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

2.1 – Uma introdução de limite de uma função

Qualquer pessoa tem uma noção intuitiva do que é limite. Estamos acostumados a uma série de limites, impostos pela sociedade e pelas leis, como os limites de velocidade, das cotas que regulam compras no exterior, limites territoriais, entre outros. Na Matemática, a ideia de uma variável aproximando-se de um valor limite é dada em geometria elementar.

O início do Cálculo é encontrado nos problemas envolvendo o cálculo de áreas e volumes pelos gregos antigos, como Eudoxo e Arquimedes. Embora aspectos da ideia de um limite estejam implícitos em seu "método de exaustão", Eudoxo e Arquimedes nunca formularam explicitamente o conceito de limite. Da mesma maneira, matemáticos como Cavalieri, Fermat e Barrow, precursores imediatos de Newton no desenvolvimento do Cálculo, não usaram limites realmente. Foi Isaac Newton quem primeiro falou explicitamente sobre limites. Ele explicou que a ideia principal de limites é que as quantidades se aproximam mais do que por qualquer diferença dada. Newton declarou que o limite era um conceito básico no Cálculo, mas foi deixado para outros matemáticos posteriores, como Cauchy, esclarecer suas ideias sobre limites. (STEWART, 2013. p. 120).

Figura 03: Arquimedes. (EVES, 2011. p. 192).

Figura 04: Bonaventura Cavalieri. (EVES, 2011. p. 426).

Figura 05: Pierre De Fermat. (EVES, 2011. p. 390).

Figura 06: Isaac Barrow. (EVES, 2011. p. 433).

Definição 1: Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a. (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a.) Então dizemos que "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L" e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

Em outras palavras, usamos a notação $\lim_{x \to a} f(x) = L$ para dizer que os valores de $f(x)$ tendem a ficar cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas $x \neq a$. Uma notação alternativa para $\lim_{x \to a} f(x) = L$ é $f(x) \to L$ quando $x \to a$.

A frase "mas $x \neq a$" na definição de limite significa que, ao procurar o limite de $f(x)$ quando x tende a a, nunca consideramos $x = a$. Na verdade, $f(x)$ não precisa sequer estar definida quando $x = a$. A única coisa que importa é como f está definida próximo de a.

A Figura 07 mostra os gráficos de três funções. Observe que, na parte (c), $f(a)$ não está definida e, na parte (b), $f(a) \neq L$. Mas, em cada caso, não importando o que acontece em a, é verdade que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

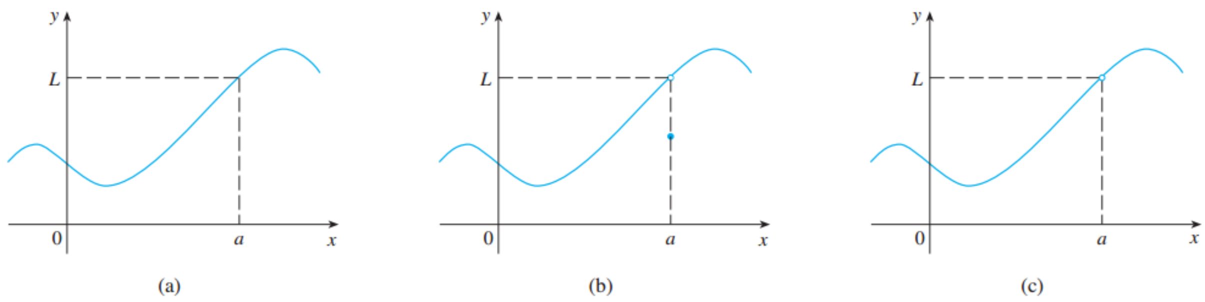

Figura 07: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ nos três casos. (STEWART, 2013, p. 108).

A operação de cálculo de limites de uma função é importante para entender o que ocorre na função. Os conceitos de limites laterais e continuidade dá condições de resolver limites de funções complexas por meio de sua decomposição na forma de combinações de funções mais simples. Para o estudo das funções assíntotas é importante o conhecimento dos limites infinitos, limites no infinito e limites infinitos no infinito.

A definição de limite é utilizada para entender o comportamento de uma função nos momentos de aproximação de determinados valores, mesmo que a função não esteja definida nesses valores. O limite de uma função possui grande importância no Cálculo Diferencial e Integral e em outros ramos da Análise matemática, definindo continuidade, derivadas e integrais de funções.

Por conseguinte, o limite de uma função quando x tende a a pode muitas vezes ser encontrado simplesmente calculando o valor da função em a. Funções com essa propriedade são chamadas de contínuas em a. A definição matemática de continuidade tem correspondência bem próxima ao significado da palavra continuidade no uso comum. (Um processo contínuo é aquele que ocorre gradualmente, sem interrupções ou mudanças abruptas.).

Definição: Uma função f é contínua em um número a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Com isso, implicitamente requer três coisas para a continuidade de f em a:

1. $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

A definição diz que f é contínua em a se $f(x)$ tende a $f(a)$ quando x tende a a. Assim, uma função f contínua tem a propriedade de que uma pequena mudança em x produz somente uma pequena alteração em $f\ (x)$. De fato, a alteração em $f\ (x)$ pode ser mantida tão pequena quanto se deseja, mantendo-se a variação em x suficientemente pequena.

Se f está definida próximo de a (em outras palavras, f está definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a), se diz que f é descontínua em a (ou que f tem uma descontinuidade em a) se f não é contínua em a.

Os fenômenos físicos são geralmente contínuos. Por exemplo, o deslocamento ou a velocidade de um veículo variam continuamente com o tempo, como a altura das pessoas. Mas descontinuidades ocorrem em situações tais como a corrente elétrica.

Geometricamente, pode-se pensar em uma função contínua em todo número de um intervalo como uma função cujo gráfico não se quebra. O gráfico pode ser desenhado sem remover sua caneta do papel. No caso de função ser descontínua, há uma interrupção no gráfico, o que obrigaria, no momento de traçar o gráfico, a tirar a caneta do papel. (ROCHA, 2013, p. 161).

2.2 – Uma introdução ao Cálculo Diferencial

A definição de derivada como é conhecida hoje, deve-se a Cauchy que a apresentou por volta de 1823, como razão de variação infinitesimal, embora Newton e Leibniz, já no século XVII tenham utilizado os fundamentos desse conceito como método para relacionar problemas de quadraturas e tangentes. (SANTANA, 2010. p. 11).

O conceito de derivada é muito importante devido a grande quantidade de aplicações. A derivada de uma função em um ponto (caso exista) mede a taxa de variação instantânea de uma função no dado ponto, e portanto, é utilizada em problemas envolvendo taxas de variação, tais como problemas envolvendo velocidade, aceleração, crescimento populacional, transferência de calor, entre muitos outros. Geometricamente, corresponde à inclinação da reta tangente ao gráfico da função naquele ponto.

Consideremos uma curva C, gráfico da função $y = f(x)$. Queremos encontrar a reta tangente à C em um ponto $P\ (a, f(a))$. Para isso, consideremos um ponto $Q\ (x, f(x))$, próximo de P, onde $x \neq a.$ Então, a inclinação da reta secante PQ é dada por

$$m_{PQ} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Façamos agora Q se aproximar de P ao longo da curva C, obrigando x tender a a. Se m_{PQ} tender a um número m, então definimos a reta tangente t como sendo a reta que passa por P e tem inclinação m (veja a figura 08).

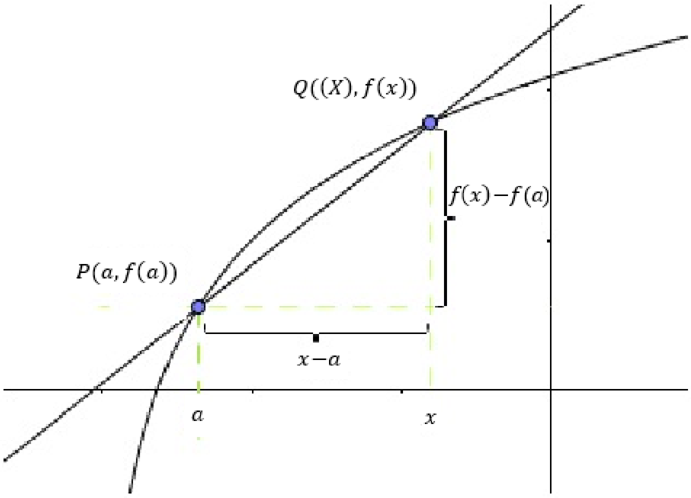

Figura 08. Curva. Fonte: (BRITO, 2013. p. 17).

Definição 1: A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P\ (a, f\ (a))$ é a reta que passa por P que tem inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

desde que exista o limite.

Considerando h o incremento de x com relação a a, ou seja, $h = x - a$, temos que quando x tende a a, h tende a 0. Assim, obtemos outra expressão para a inclinação da reta tangente:

$$m = \lim_{x \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Definição 2: A derivada de uma função f em um ponto a, denotada por $f'\ (a)$, é o valor

$$f'\ (a) = \lim_{x \to a} \tfrac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A derivada de uma função: Seja f uma função definida no intervalo (a, b). Definimos a **função derivada** de f, denotada por f', por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

para cada $x \in (a, b)$ tal que o limite acima existe.

Exemplo: Qual é a função derivada da função $f(x) = 3.x^2$?

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(x + \Delta x)^2 - 3x^2}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(x^2 + 2.x.\Delta + \Delta x^2) - 3x^2}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2 + 6.x.\Delta + 3.\Delta.x^2 - 3x^2}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6.x.\Delta + 3.\Delta.x^2}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x.(6x + 3.\Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3.\Delta x$$

E o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, será:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + \Delta x) = 6x + 0 = 6x$$

Portanto, a função derivada da função $f(x) = 3.x^2$ é $f'(x) = 6x$.

Regras de Derivação

O processo de cálculo da derivada é denominado derivação. Assim, a derivação é o processo de derivar uma função f' de uma função f. Se uma função possui uma derivada em x_1, ela será derivável em x_1. Isto é, a função f será derivável em x_1 se $f\ (x_1)$ existir. Uma função será derivável em um intervalo aberto se ela for derivável em todo número no intervalo aberto.

Propriedades Operatórias, chamadas Regras das Derivadas segundo Rocha (2013, p. 167-172):

1. Função Constante

   Se $y = f(x) = k$, com $k \in R$. Então $f'(x) = 0$.

2. Função Identidade

   $Se\ y = f(x) = x$, com $x \in R$. Então $f'(x) = 1$.

3. Produto de uma constante por uma Função

   Se $y = f(x) = k \,.\, u\,(x)$, com $k \in R$. Então $f'(x) = k \,.\, u'\,(x)$.

4. Função Soma ou Diferença

   Se $y = f(x) = u(x) + v(x)$. Então $f'\,(x) = u'(x) + v'(x)$.

   Se $y = f(x) = u(x) - v(x)$. Então $f'\,(x) = u'(x) - v'(x)$.

5. Função Produto

   Se $y = f(x) = u(x)\,.\,v\,(x)$. Então $f'(x) = u'(x)\,.\,v(x) + u(x)\,.\,v'(x)$.

6. Função Quociente

   Se $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, com $v\,(x) \neq 0$. Então $f'(x) = \frac{u'.v - u\,.v\prime}{v^2}$

7. Função Potência

   Se $y = f(x) = [u(x)]n$, com $n \in R$. Então $f'(x) = n\,.\,u^{n-1}$.

8. Função Logaritmo Natural

   Se $y = f(x) = Ln\ u(x)$, com $u(x) > 0$. Então $f'(x) = \frac{u\prime}{u}$.

9. Função Exponencial de Base Constante

   Se $y = f(x) = a^{u(x)}$, com $a \in R^{+}$. Então $f'(x) = au.\,(Ln\ a)\,.\,u'$

10. Derivada de uma Função Composta (Regra da Cadeia)

   Se g for derivável em x e f for derivável em $g\,(x)$, então a função composta $F = f^{\underline{o}}\,g$ definida por $F\,(x) = fg\,(x)$ é derivável em x e F' é dada pelo produto $F1(x) =$

$f'(g(x)) . g'(x)$. Na notação de Leibniz, se $y = f\ (u)\ e\ u = g\ (x)$ forem funções deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} = \frac{du}{dx}$$

Apresentaremos, a seguir, alguns resultados importantes da teoria das derivadas.

O Teorema de Rolle

Segundo Brito (2013. p. 22), para respaldar a demonstração do Teorema de Rolle, vamos enunciar os Teoremas de Valor Extremo e o Teorema de Fermat: **Teorema do Valor Extremo**: Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f\ (c)$ e um valor mínimo absoluto $f\ (d)$ em algum número c e d em $[a, b]$. **Teorema de Fermat**: Se f tiver um máximo ou mínimo local em c, e $f'\ (c)$ existir, então $f'\ (c) = 0$.

Definição: Seja f: $[a, b] \rightarrow R\ e\ c \in (a, b)$. O ponto c é dito crítico para $f\ se\ f'\ (c) = 0$.

Teorema de Rolle: Seja f uma função que satisfaz as seguintes hipóteses:

(i) f é contínua no intervalo $[a, b]$;
(ii) f é derivável no intervalo aberto (a, b);
(iii) $f\ (a) = f\ (b)$.

Então existe um número c no intervalo aberto (a, b), tal que $f'\ (c) = 0$.

Demonstração: Pode acontecer que f tenha valor constante $f\ (x) = f\ (a) = f\ (b)$ em todo o intervalo $[a, b]$; nesse caso, sua derivada f' é identicamente nula e o teorema está demonstrado. Se f não for constante, ela terá que assumir valores maiores ou menores que $f\ (a) = f\ (b)$.

Se $\boldsymbol{f\ (x) < f\ (a)}$, para algum $\boldsymbol{x\ em\ (a, b)}$, pelo Teorema do Valor Extremo assume um valor mínimo em algum ponto de $[a,\ b]$. Como $f\ (a) = f\ (b)$ ela deve assumir esse valor em um número c no intervalo aberto (a, b). Então f tem um mínimo local em c e f é diferenciável em c (pela hipótese de que f é diferenciável no intervalo (a, b)). Portanto, $f'\ (c) = 0$ pelo Teorema de Fermat.

Obs. A recíproca do Teorema de Rolle não é verdadeira. A hipótese de f ser contínua em $[a,\ b]$, mas derivável em (a, b) é feita porque as derivadas $f'\ (a)$ e $f'\ (b)$ não intervêm na demonstração.

O Teorema do Valor Médio

Conforme (STEWART, 2013, p. 285), o Teorema do Valor Médio (figura 09) nos diz que dada uma função contínua f definida num intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em (a, b), existe algum ponto c em (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Geometricamente, isto significa que a tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa c é paralela à secante que passa pelos pontos de abcissas a e b.

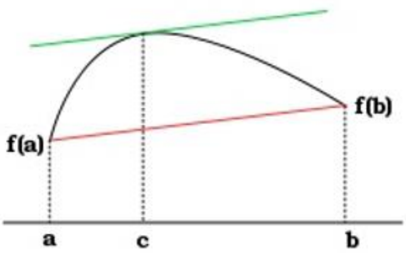

Figura 09: Valor Médio. Fonte: (BRITO, 2013. p. 23).

O Teorema do Valor Médio também tem uma interpretação em termos físicos: se um objeto está em movimento e se a sua velocidade média é v, então, durante esse percurso (intervalo $[a, b]$), há um instante (ponto c) em que a velocidade instantânea também é v.

Vejamos a demonstração do Teorema do Valor Médio. Consideremos primeiramente, a reta que passa pelos pontos $(a, f\ (a))\ e\ (b, f\ (b))$, isto é:

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a).$$

Essa reta é o gráfico da função

$$T(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a) + f(a).$$

Seja g a função que é a diferença entre f e T, isto é $g\ (x)\ =\ f\ (x) - T\ (x)$. Assim,

$$g(x) = f(x) - (\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a) + f(a)).$$

Quando $x\ =\ a$, temos

$$g(a) = f(a) - (\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .\ (a-a) + f(a)) = f(a) - f(a) = 0.$$

e, quando $x = b$, temos

$$g(b) = f(b) - (\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .\ (b-a) + f(a)) = f(b) - (f(b) - f(a) + f(a)) = 0.$$

Além disso, como g é a diferença entre duas funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b), ela própria é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Logo, podemos usar o Teorema de Rolle para g, concluindo que existe um número c no intervalo (a, b), tal que: $g'(c) = 0$.

Sendo $g'(x) = f'(x) - (\frac{f(b)-f(a)}{b-a})$, temos que $g'(c) = f'(c) - (\frac{f(b)-f(a)}{b-a})$, e portanto,

$f'(c) - (\frac{f(b)-f(a)}{b-a}) = 0$, donde, $f'(c) = (\frac{f(b)-f(a)}{b-a})$. E a demonstração está completa.

Os Gregos da Antiguidade já tinham o conceito de reta tangente a uma curva em um ponto. Como as equações eram então utilizadas para descrever curvas, a quantidade e variedade de curvas estudadas aumentaram bastante em comparação àquelas conhecidas na época clássica.

Para Marques (2006) a derivada pode ser compreendida geometricamente como sendo um método para calcular o coeficiente angular da reta tangente. Considerando $y = f(x)$ uma curva e $P(x_0, y_0)$ um ponto sobre o gráfico. Se a função for derivável, a mesma é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto P, através do limite:

$$tg(\alpha) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

quando que existir. Por conseguinte, a questão da derivada está intimamente ligada às retas tangentes a curva nos pontos tomados e suas implicações com máximos e mínimos. Com isso, através da derivada pode-se analisar o formato dos gráficos das funções.

A concavidade do gráfico de uma função num intervalo contido em seu domínio e os pontos de inflexão

Seja f uma função derivável num intervalo aberto I contido em seu domínio e n_0 um ponto de I.

A reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por:

$$Y - f(x_0) = f'(x_0) . (x - x_0)$$

Ou seja, a reta tangente pode ser encarada como sendo o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau T, dada por:

$$T\ (x) = f\ (x_0)\ +\ f'\ (x_0) \,.\, (x - x_0)$$

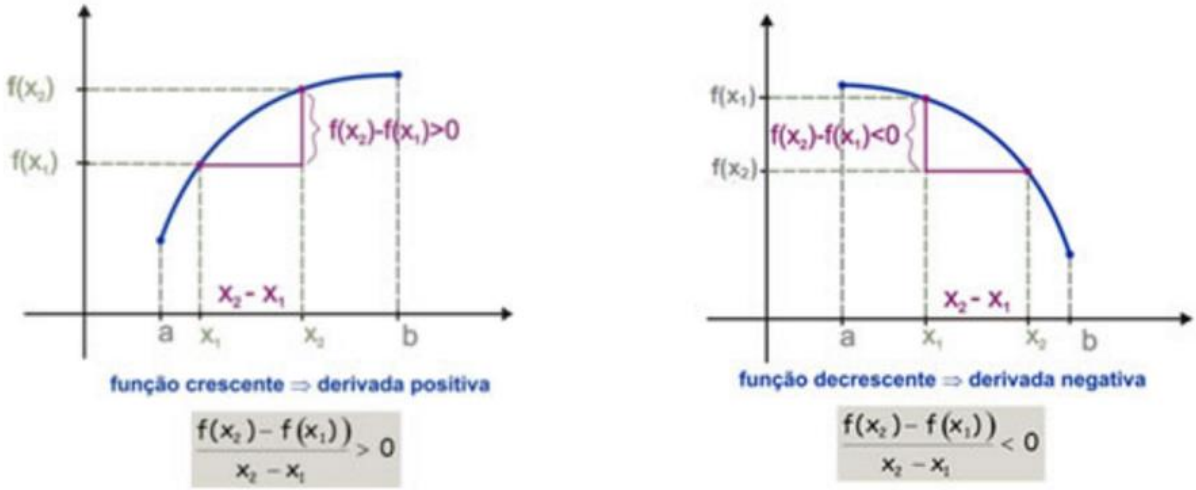

Figura 10: Função crescente e função decrescente. Fonte: BIZELLI.[1]

Definição: Dizemos que o gráfico de f tem **concavidade para cima** no intervalo aberto I quando $f\ (x)\ >\ T\ (x)$ quaisquer que sejam x e x_0 em I, sendo $x\ \neq\ x_0$.

Analogamente, podemos definir o que vem a ser concavidade para baixo do gráfico de f.

Definição: Dizemos que o gráfico de f tem **concavidade para baixo** no intervalo aberto I quando $f\ (x)\ <\ T\ (x)$ quaisquer que sejam x e x_0 em I, sendo $x \neq x_0$.

Finalmente, o ponto onde ocorre mudança de concavidade no gráfico tem um nome especial que é **ponto de inflexão**. Mais precisamente, temos:

Definição: Seja f uma função contínua e x_0 um ponto de seu domínio. O ponto x_0 é denominado um ponto de inflexão de f quando nele ocorre mudança de concavidade do gráfico de f.

Um resultado importante relaciona a derivada segunda da função com a concavidade do gráfico de f.

Propriedade: Seja f uma função derivável pelo menos até segunda ordem num intervalo aberto I.

---

[1] BIZELLI, Maria Helena S. S. **Aplicações da Derivada**. Disponível em: <http://www.calculo.iq.unesp.br/Calculo1/DerivadaDizSobreFuncaof.htm>. (Acesso em 28 out. de 2016).

a) Se $f''(x) > 0$ em I, então o gráfico de f terá concavidade para cima em I.

b) Se $f''(x) < 0$ em I, então o gráfico de f terá concavidade para baixo em I.

Na figura 10, observa-se que em todos os pontos onde uma função é crescente, a derivada é positiva (o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função nesses pontos é positivo) e que nos pontos onde a função é decrescente, a derivada é negativa (o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função nesses pontos é negativo).

Máximos e Mínimos de uma Função

Fermat, em 1963, divulgou um novo método para determinação de tangentes, estudo que levaria aos máximos e mínimos. Em aplicações simples, raramente precisa-se provar que certo valor crítico é um máximo ou um mínimo, porém para ter um embasamento teórico observe as seguintes definições:

Dada uma função $f: I \rightarrow R$, um ponto $x_0 \in I$ é chamado de:

- Ponto de máximo relativo (ou local) da função, quando $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$.
- Ponto de mínimo relativo (ou local) da função, quando $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.

O valor $f(x_0)$ é chamado de máximo ou mínimo relativo (ou local) de f, e $(x0, f(x0))$ são as coordenadas dos pontos de máximo ou de mínimo relativo de f.

Diz-se que um ponto x_0 é um ponto crítico para a função f quando f é definida em x_0 mas não é derivável em x_0, ou $f'(x_0)\, x = 0$.

Segundo Flemming, Luz e Wagner (2006), o uso da derivada para determinar os máximos e mínimos de uma função pode-se utilizar dois critérios enunciados por dois teoremas:

Teorema 1: Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e possui derivada em todos os pontos do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto $c \in (a, b)$.

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então $y = f(x)$ tem um máximo relativo em c.

(b) Se $f'(x) < 0$ para todo para todo $x > c$, então $y = f(x)$ tem um mínimo relativo em c.

Teorema 2: Seja $y = f\ (x)$ uma função derivável num intervalo (a, b), e $c\ \in\ (a, b)$ é um ponto crítico da função. Se $y = f\ (x)$ admite derivada de segunda ordem em (a, b), assim:

(a) Se $f\ ''(x) < 0, y = f\ (x)$ tem um valor máximo relativo em c.

(b) Se $f\ ''(x) > 0, y = f\ (x)$ tem um valor mínimo relativo em c.

Conforme Leithold (1994), quão grande foi à contribuição de Pierre de Fermat, pois dentre as aplicações mais notáveis do cálculo estão aquelas que buscam valores de máximos ou mínimos de funções. Pois, dentre as importantes aplicações de máximos e mínimos destacamos os problemas que têm na sua estrutura o valor máximo ou mínimo de algumas variáveis tais como: área, volume, força, potência, tempo, lucro ou custo, dentre outros.

2.3 – Uma introdução ao Cálculo Integral

Assim como a derivada, a integral também é um dos conceitos mais importantes do Cálculo, e pode ser utilizada em uma grande quantidade de aplicações. Já vimos que o conceito de derivada está intimamente ligado ao problema de encontrar a inclinação da reta tangente a uma curva em um determinado ponto. Agora, veremos que a integral está ligada ao problema de determinar a área de uma figura plana qualquer.

Inicialmente, consideremos o seguinte problema: encontrar a área de uma região S que está acima do eixo x e sob a curva $y = f(x)$, para x de a até b. Isso quer dizer que S (ver figura 10) está limitada pelo gráfico de uma função contínua f (onde $f\ (x) \geq 0$), as retas verticais $x\ =\ a$ e $x\ =\ b$, e o eixo x.

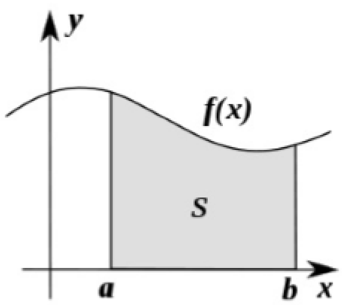

Figura 11: Calcular a área. Fonte: (BRITO, 2013. p. 29).

Um conceito conhecido de área é o da área do retângulo. Calcular a área do retângulo é relativamente fácil, assim como a de outras figuras geométricas elementares, como triângulo e paralelogramo. Assim, a área da região S pode ser calculada aproximando a região por regiões mais simples, das quais já sabemos determinar a área pelos métodos da geometria elementar.

Para isso, vamos fazer uma partição P do intervalo $[a, b]$, isto é, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, por meio dos pontos $x_0, x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_n$, escolhidos arbitrariamente, da seguinte maneira, $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$.

Determinemos o comprimento do i-ésimo subintervalo $[x_{i-1},\ x_i]$ como sendo

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Vamos construir retângulos de base $x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$ onde c_i é um ponto do intervalo $[x_{i-1}, x_1]$. Assim, a soma das áreas dos n retângulos, que denotaremos por S_n, será

$$S_n = f\ (c_i)\ \times\ \Delta x_1\ +\ f\ (c_2) \times \Delta x_2 + \ldots + f\ (c_n)\ \times\ \Delta x_n$$

que pode ser reescrito por

$$S_n = \sum_{i-1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i.$$

A soma acima é chamada de Soma de Riemann da função f relativa à partição P. Quando n cresce, é “natural” esperar que a soma das áreas dos retângulos aproxime da área S sob a curva.

Chamamos norma da partição P o comprimento do seu subintervalo mais longo dado por

$$||P|| = max\{\Delta x_i;\ i = 1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Definição 6: A medida da área A da região S que está sob um gráfico de uma função contínua f é

$$A = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i,$$

se esse limite existir.

O limite acima parece em muitos outros problemas físicos, não somente em problemas de área. Isso nos motiva a seguinte definição:

Definição 7: Seja $f(x)$ uma função limitada definida no intervalo fechado $[a, b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a, b]$. A integral de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, denotada por

$\int_a^b f(x)dx$, é dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i,$$

desde que exista o limite.

Nesse caso, temos que:

(i) $\int$ é o sinal de integração;

(ii) $f\ (x)$ é a função integrando;

(iii) $d\ (x)$ é a diferencial que identifica a variável de integração.

Propriedades da integral definida:

As demonstrações das propriedades da integral definida não serão demonstradas e podem ser encontradas em (STEWART, 2013, p. 337-348).

Sejam $f(x)$ e $g\ (x)$ funções integráveis no intervalo fechado $[a, b]$ e seja k uma constante real qualquer, temos as seguintes propriedades:

(i) $\int_a^b kf\ (x)dx = k \int_a^b f\ (x)\ dx.$

(ii) $\int_a^b \big(f\ (x) \pm g\ (x)\big)\ dx = \int_a^b f\ (x)\ dx\ \pm \int_a^b g\ (x)d\ x$

(iii) Se $a\ <\ c\ <\ b$, então $\int_a^b f\ (x)\ dx = \int_a^c f\ (x)\ dx + \int_c^b f\ (x)\ dx.$

(iv) Se $f\ (x)\ \geq\ 0$ para todo $x\ \in\ [a, b]$, então $\int_a^b f\ (x)\ dx \geq 0.$

(v) Se $f\ (x)\ \geq\ g\ (x)$ para todo $x\ \in\ [a, b]$, então, $\int_a^b f\ (x)\ dx\ \geq\ \int_a^b g\ (x)\ dx.$

(vi) $\left|\int_a^b f\ (x)\ dx\right| \leq \int_a^b |\ f\ (x)\ |\ dx.$

Considerações: Calcular uma integral através do limite das Somas de Riemann é geralmente uma tarefa trabalhosa. Dessa forma estabeleceremos o chamado Teorema Fundamental do Cálculo que nos permite calcular integrais de maneira muita mais fácil.

O Teorema Fundamental do Cálculo - TFC

Segundo Brito (2013, p. 32), Considerado um dos mais importantes teoremas do estudo do cálculo, o Teorema Fundamental do Cálculo relaciona os conceitos de derivada e integral e nos permite calcular a integral de uma função utilizando uma primitiva da mesma.

Usaremos o teorema a seguir na demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema do Valor médio para Integrais: Se f é contínua em $[a, b]$, então existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\ (x)dx.$$

Demonstração: A demonstração pode ser vista em (STEWART, 2013, p. 257-261).

Teorema Fundamental do Cálculo - Parte I: Seja a função $f(x)$ contínua. Seja

$$F(x) = \int_a^x f\ (t)\ dt,$$

então $F'(x) = f\ (x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração: Considerando $h > 0$, temos, pela definição de integral e pelas propriedades da integral definida, que

$$\frac{F\ (x+h) - F\ (x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f\ (t)\ dt - \int_a^x f\ (t)\ dt}{h} = \frac{\int_a^x f\ (t)\ dt + \int_x^{x+h} f\ (t)\ dt - \int_a^x f\ (t)\ dt}{h} =$$

$$\frac{\int_x^{x+h} f\ (t)\ dt}{h}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, existe t_h no intervalo fechado de extremos x e $x + h$, tal que

$$\frac{\int_x^{x+h} f\ (t)\ dt}{h} = f\ (t_h).$$

Portanto,

$$\frac{F\ (x+h) - F\ (x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f\ (t)\ dt}{h} = f(t_h).$$

Como $\lim_{h\to 0} f\ (t_h) = f\ (x)$, já que t_h pertence ao intervalo fechado de extremo x e $x + h$, temos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F\ (x+h) - F\ (x)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\int_x^{x+h} f\ (t)\ dt}{h} = \lim_{h\to 0+} f(t_h) = f(x).$$

De modo análogo, mostra-se o mesmo resultado para $h \to 0^-$. Portanto, $F'(x) = f(x)$.

Teorema Fundamental do Cálculo - Parte II: Se G é tal que $G'\ (x) = f\ (x)$ para $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f\ (x)\ dx = G\ (b) - G\ (a).$$

Demonstração: Pelo TFC - Parte I, $F'\ (x) = f\ (x)$. Portanto, como $G'\ (x) = f\ (x)$, por hipótese, temos $G'\ (x) = F'\ (x) \Rightarrow G\ (x) = F\ (x) + c$. Logo,

$$G\ (x) = F\ (x) + c = \int_a^x f\ (t)\ dt + c.$$

Então,

$$G(a) = F(a) + c = \int_a^a f\ (t)\ dt + c = 0 + c \Rightarrow G\ (a) = c$$

$$G\ (b) = F\ (b) + c = \int_b^b f\ (t)\ dt + c = \int_b^b f\ (t)\ dt + G \Rightarrow \int_a^b F\ (x)\ dx = G\ (b) - G\ (a).$$

Definição 8: Uma função $F\ (x)$ é chamada uma primitiva da função $f\ (x)$ em um intervalo I, se para todo $x\ \in\ I$, tem-se $F'(x) = f\ (x)$.

Definição 9: Se a função $F\ (x)$ é uma primitiva da função $f\ (x)$, então a função $F\ (x) + C$ também é uma primitiva de $f\ (x)$, para cada número real C. Definimos a integral indefinida da função $f\ (x)$, denotada $\int f\ (x)\ dx$, por

$$\int f(x)\ dx = F\ (x) + C.$$

Lê-se: Integral indefinida de $f\ (x)$ ou simplesmente integral de $f\ (x)$ em relação a x. Chamamos de integração o processo que permite encontrar a integral indefinida de uma função.

Da definição de integral indefinida, temos as seguintes observações:

(i) $\int f\ (x)\ dx = F\ (x) + C \Leftrightarrow F'\ (x) = f(x)$.

(ii) $\int f\ (x)\ dx$ representa uma família de funções, isto é, a família ou o conjunto de todas as primitivas da função integrando.

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\int f\ (x)\ dx\right) = \frac{d}{dx}(F\ (x) + C) = \frac{d}{dx}F\ (x) = F'(x) = f\ (x)$.

A partir delas observamos que:

$$\int f\ (x)\ dx = F\ (x) + C \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int f\ (x)\ dx\right) = f\ (x).$$

Isto nos permite que obtenhamos fórmulas de integração diretamente das fórmulas de derivação.

Propriedades da integral indefinida

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções reais definidas no mesmo domínio e k uma constante real. Então:

Proposição 1. $\int kf\ (x)\ dx = k\int f\ (x)\ dx$.

Proposição 2. $\int \left(f\ (x) + g\ (x)\right)\ dx = \int f\ (x)\ dx + \int g\ (x)\ dx$.

O conceito do Cálculo Integral, bem como sua relação com o Cálculo Diferencial, permite o estudo de diferentes métodos de integração para lidar com grande variedade de funções elementares e situações que possam surgir ao longo da resolução de integrais, assim como resolver problemas de estimar áreas limitadas por curvas e que podem representar as mais variadas grandezas. O Teorema Fundamental do Cálculo representa uma forma alternativa para o cálculo de integrais, bem como para o conceito de integrais indefinidas.

3 – Desvendando a história do Cálculo Diferencial e Integral

Foram necessários muitos anos e muitas contribuições de diversos grandes cientistas até a formalização do Cálculo, como, por exemplo, Kepler e Galileu. Contudo, dois grandes nomes entraram para a história, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, como precursores do Cálculo Infinitesimal ou Cálculo Diferencial e Integral, como é conhecido hoje.

Figura 12: Johann Kepler. (EVES, 2011. p. 357).

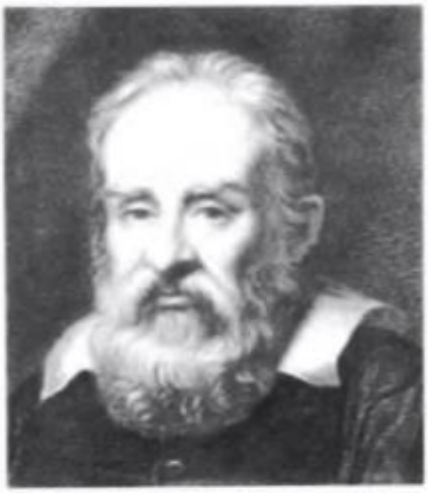

Figura 13: Galileu Galilei. (EVES, 2011. p. 353).

Segundo Maor:

> O nome "Cálculo" é uma abreviação de "Cálculo Diferencial e Integral". A palavra cálculo em seu sentido genérico significa qualquer manipulação sistemática de objetos matemáticos, sejam números ou símbolos abstratos. O significado restrito da palavra cálculo, ou seja, o Cálculo Diferencial e Integral é devido a Leibniz. Newton nunca usou essa palavra preferindo chamar sua invenção de "método de fluxões". (MAOR, 2008, p. 103).

O desenvolvimento histórico do Cálculo seguiu em ordem contrária à daquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto. Primeiro, surgiram os conceitos envolvendo o Cálculo Integral e só muito tempo depois os conceitos do Cálculo Diferencial. A primeira vez em que a ideia de limite apareceu, foi por volta de 450 a. C. Mas foi Isaac Newton o primeiro a reconhecer, em certo sentido, a necessidade do limite, descobriu o papel preliminar que o limite teria no Cálculo, sendo essa a semente da definição moderna. Deve-se a Cauchy grande parte da abordagem do cálculo apresentado nos atuais textos universitários, como os conceitos básicos de limite e continuidade.

Os processos somatórios ligados ao Cálculo Integral tiveram origem na ideia de determinação de certas áreas, volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos.

O Cálculo Diferencial é o estudo das mudanças ou, mais especificamente, das taxas de mudanças de uma quantidade variável. A maioria dos fenômenos físicos ao nosso redor envolve quantidades que mudam com o tempo, tais como a velocidade de um carro em movimento, as leituras de temperatura de um termômetro ou a corrente elétrica fluindo em um circuito. Hoje tais quantidades são conhecidas como variáveis; Newton chamava de um termo fluente. O Cálculo Diferencial está relacionado à descoberta da taxa de mudança de uma variável ou, para usar a expressão de Newton, a fluxão de um determinado fluente.

Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra.

Sendo assim, Cálculo designa dois processos: a derivação e a integração. A derivação ‘relaciona-se com a descrição e a mensuração de como as coisas variam, se movem e crescem” (Baron, 1985, p.1). E a integração constitui uma ferramenta básica nos processos de soma.

O Cálculo Diferencial e Integral surge e se desenvolve a partir de uma combinação entre problemas e formulações de conceitos e teorias adequados para resolvê-los. E essas teorias desencadearam novos problemas e novas teorias até a formulação de um conjunto de regras operacionais para a solução de diversos problemas. Historicamente o modelo geométrico exerceu um papel importante no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

Antes do século XVII os processos de Derivação e Integração eram estudados separadamente. Só depois, foi possível associá-los através do Teorema Fundamental do Cálculo.

3.1 O Cálculo na Antiguidade

O Papiro Egípcio de Moscou, escrito aproximadamente em 1890 a. C., é o primeiro registro que se tem do que parece ser uma estimativa primitiva da área de uma superfície curva, onde o escriba pede a área da superfície de um cesto e resolve a questão com um cálculo semelhante a uma fórmula de integração. Esse mesmo Papiro traz outros problemas matemáticos da vida quotidiana dos egípcios, como por exemplo, o cálculo do volume de um tronco de pirâmide (BOYER, 2010).

Outro documento histórico do Cálculo é o Papiro Rhind, que é um papiro egípcio de 1600 a. C. e foi copilado pelo escriba Ahmes. Neste papiro encontramos resultados matemáticos usados no Egito Antigo. Por exemplo:

- O volume de uma pirâmide quadrada era calculado como 1/3 do volume do prisma retangular;
- A área de um círculo era obtida por um quadrado cujo lado é 8/9 do diâmetro círculo.

Essas regras eram aceitas sem uma prova rigorosa. No caso do volume da pirâmide, o resultado está correto, mas sem demonstração. Para se chegar a esse resultado, seria necessário o uso de infinitésimo, que é conhecido nos dias de hoje. A área do círculo, por sua vez, não é exatamente a que conhecemos hoje, mas uma aproximação da fórmula atual $A_c = \pi . r^2$.

Eudoxo, matemático e astrônomo grego que viveu no século IV a. C., deu uma significativa contribuição para a Matemática. Foi Eudoxo que desenvolveu o Método da Exaustão, que articula os conceitos de infinitésimos.

> Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2013, p. 419).

Uma das aplicações desse método é calcular a área do círculo. Para isso, é necessário inscrever e circunscrever polígonos regulares no círculo. À medida que o número de lados aumentam, temos uma convergência para a área real do círculo. O Método da Exaustão assemelha-se muito ao princípio da indução matemática.

Arquimedes de Siracusa, natural da cidade grega de Siracusa, situada na ilha da Sicília, nasceu por volta de 287 a. C. e morreu durante o saque de Siracusa em 212 a. C. Era filho de um astrônomo e desfrutava de alto prestígio junto ao rei Hierão. Foi um matemático, físico, engenheiro, inventor e astrônomo grego. Entre os matemáticos antigos, foi quem aplicou da melhor maneira o Método da Exaustão, chegando muito próximo da atual integração. Segundo Eves (2013), Archimedes chegou a resultados equivalentes a muitas integrais definidas que são utilizadas atualmente para o cálculo de áreas e volume.

Figura 14: Arquimedes. (EVES, 2011. p. 192).

Apenas por volta do início do século XVII, as ideias de Archimedes tiveram novos desdobramentos. Segundo Melchiors e Soares (2013, p. 69), Arquimedes também desenvolveu o Método do Equilíbrio para calcular a área de regiões limitadas por parábolas, expirais e várias outras curvas. Archimedes usava o Método do Equilíbrio que se utilizavam do momento de um corpo para auxiliar no cálculo da área ou volume, e usava o Método da Exaustão em seguida para conseguir uma demonstração rigorosa dos seus resultados.

O método de exaustão é o fundamento de um dos processos essenciais do cálculo infinitesimal. No entanto, enquanto no cálculo se soma um número infinito de parcelas, Arquimedes nunca considerou que as somas tivessem uma infinidade de termos. Para poder definir uma soma de uma série infinita seria necessário desenvolver o conceito de número real que os gregos não possuíam. Não é, pois, correto falar do método de exaustão como um processo geométrico de passagem para o limite. A noção de limite pressupõe a consideração do infinito que esteve sempre excluída da matemática grega, mesmo em Arquimedes. Mas, no entanto, o seu trabalho foi, provavelmente, o mais forte incentivo para o desenvolvimento posterior da ideia de limite e de infinito no século XIX. De fato, os trabalhos de Arquimedes constituem a principal fonte de inspiração para a geometria de século XVII que desempenhou um papel importante no desenvolvimento do cálculo infinitesimal. (ALVARENGA, p. 2).

3.2 O Cálculo na Idade Média

Na Idade Média, o matemático indiano Brahmagupta Aryabhata nasceu perto da atual Patna em 598 d. C. e morreu 668 com 70 anos, usou a noção infinitesimal em 499 d.C., expressando-a em um problema de astronomia na forma de uma equação diferencial básica. Essa equação levou Bháskara II, no século XII, a desenvolver uma derivada prematura, representando uma mudança infinitesimal, e ele desenvolveu também o que seria uma forma primitiva do Teorema de Rolle. (EVES, 2011. p. 250-251).

No século XII, o matemático persa Sharaf al-Din al-Tusi descobriu a derivada de polinômios cúbicos, um resultado importante no cálculo diferencial. No século XIV, Madhava de Sangamagrama, juntamente com outros matemáticos-astrônomos da Escola Kerala de Astronomia e Matemática, descreveu casos especiais da Série de Taylor, que no texto são tratadas como Yuktibhasa.

Porém, nessa época, na Europa foram feitos poucos avanços na Matemática, incluindo o Cálculo. A retomada apenas se deu com as invasões árabes, que trouxeram junto a introdução do sistema hindu-arábico, apesar da resistência de certos grupos sociais, pois esses números facilitavam as operações aritméticas.

> Como esse sistema ameaçava democratizar os números, eles foram demonizados por aqueles que tinham interesse em restringir o domínio dos números e reter isso como instrumento especial das elites. Se a Matemática fosse aberta a todos, uma fonte de poder seria perdida. (ROONEY, 2012. p. 60).

3.3 Cálculo e a sua Evolução no Século XVII

Na Renascença, pouco ou nada foi adicionado à geometria dos antigos gregos. Porém, no ano de 1600, um inesperado reavivamento do assunto aconteceu. Nesse período, a atividade dos matemáticos se estenderam para muitos campos. No começo, a revitalização foi através dos escritos antigos, porém, os estudiosos começaram a adquirir mais confiança sobre as suas próprias observações.

Havia uma necessidade de experimentar e determinar como as coisas aconteciam. Enquanto que na Renascença acorreu uma volta os conceitos clássicos, no século XVII era estabelecida uma matemática sobre fundamentos inteiramente novos.

O Cálculo apoiado pela Geometria Analítica, foi o maior instrumento matemático descoberto no século XVII. Ele se mostrou notavelmente poderoso e eficiente para atacar problemas insolúveis em tempos anteriores. Foi sua ampla e surpreendente aplicabilidade que atraiu o grosso dos pesquisadores em Matemática da época, resultando daí uma profusão de artigos poucos preocupados com o estado bastante insatisfatório dos fundamentos do assunto. Os processos empregados eram frequentemente justificados com argumento de que eles funcionavam. E só perto do fim do século XVIII, quando muitos absurdos e contradições tinham-se insinuado na Matemática, sentiu-se que era essencial examinar as bases da análise para dar-lhes uma fundamentação lógica rigorosa. O cuidadoso esforço que se seguiu, visando a essa fundamentação, foi uma reação ao emprego descontrolado da intuição e do formalismo do século anterior. A tarefa se mostrou difícil, ocupando em suas várias ramificações, a maior parte dos 100 anos seguintes. (EVES, 2011. p. 462).

O século XVII foi um grande marco para o surgimento do Cálculo. Grandes estudiosos, como Cavalieri, Torricelli, Barrow, Descartes, Fermat e Wallis, preparavam o caminho, para que Newton e Leibniz chegassem a descoberta do Cálculo.

Dois nomes importantes dessa época foram Pierre de Fermat e René Descartes, que simultaneamente fizeram a junção de Álgebra e Geometria, e produziram uma inovação notável, a Geometria Analítica.

Fermat, embora seu nome tenha se mantido em obscuro por algum tempo, até metade do século XIX resolveu muitos problemas fundamentais do Cálculo. Foi o primeiro a obter o procedimento para diferenciar polinômios e conseguiu resolver problemas importantes de maximização, minimização de área e de tangência, inspirando até a Isaac Newton.

O Método das Fluxões de Newton não era uma ideia inteiramente nova. Exatamente como integração, ele estivera no ar durante algum tempo e ambos, Fermat e Descartes, usaram em vários casos particulares. A importância do Método de Newton se dá pois forneceu um procedimento geral, algoritmo, para se encontrar a taxa de mudança de praticamente qualquer função. Seus predecessores abriram caminho, mais foi Newton quem transformou suas ideias em uma ferramenta poderosa, universal, que logo seria aplicada com enorme sucesso em todos os ramos da ciência. (MAOR, 2008, p. 106).

Outra importante contribuição foi a do italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), que desenvolveu métodos semelhantes ao Cálculo para encontrar o comprimento do arco e os infinitesimais.

Johannes Kepler (1571-1630), por sua vez, também desenvolveu ideias relativas a infinitésimos para calcular área que estavam envolvidas com a segunda lei do movimento planetário, que diz que áreas percorridas pelo raio vetor que une o centro do planeta ao centro do Sol são iguais em períodos iguais. Para isso, Kepler usou o procedimento de integração.

John Wallis (1616-1703), por sua vez, publicou a *Arthimetica infinitorum*, uma importante obra para o desenvolvimento do Cálculo, e sua obra *Algebra: history and practive* foi a primeira a apresentar raízes complexas de equações em gráficos.

Figura 15: Evangelista Torricelli. (EVES, 2011. p. 397).

O francês Blaise Pascal (1623) também deu sua contribuição para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial. Pascal também é introdutor do símbolo ∞ (símbolo do infinito, representa o conceito do que seria a eternidade, como algo que não tem um começo nem fim) para representar um número muito grande de linhas, afirma existir uma diferença muito pequena entre uma linha e um paralelogramo de altura infinitamente pequena, de tal modo que, considerando uma certa espessura da linha e por um processo de multiplicação infinito, a linha adquire uma altura igual à da figura na qual é inscrita. (CARVALHO, 2007. p. 9).

Com isso, Pascal demonstrou no trabalho "Triângulo aritmético", publicado em 1854, diversas propriedades do triângulo e aplicou-as no estudo das probabilidades. Antes de Pascal, já Tartaglia usara o triângulo nos seus trabalhos e, muito antes, os matemáticos árabes e chineses já o utilizavam. Este famoso triângulo que se pode continuar indefinidamente aumentando o número de linhas, é conhecido como **Triângulo de Pascal** ou Triângulo de Tartaglia. Trata-se de um arranjo triangular de números em que cada número é igual à soma do par de números acima de si.

Por conseguinte, Christian Huygens (1629-1695), estudou probabilidade e publicou importantes resultados geométricos. Além disso, na mesma época, o inglês Isaac Barrow (1630-1677), ficou conhecido por unificar ideias e resultados matemáticos, aplicando com êxito a Geometria e o Cálculo à óptica.

Figura 16: Christian Huygens. (EVES, 2011. p. 399).

James Gregory (1638-1675), nascido em Brumoak, esboçou o início de uma teoria sobre convergência e foi o primeiro a publicar geometricamente o que hoje é conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo.

3.4 – Os “pais” do Cálculo: Newton e Leibniz

Como pioneiros na história do Cálculo, Newton e Leibniz merecem um destaque especial. Eles unificaram métodos que se tornaram instrumentos importantíssimos da Ciência.

Figura 17: Isaac Newton – 1642 – 1727. (EVES, 2011. p. 437).

Isaac Newton, nascido na aldeia de Woolsthorpe no dia de Natal de 1642, foi um cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático, embora tenha sido também astrônomo, alquimista, filósofo natural e teólogo, Newton faleceu em 1727. Sua grande contribuição para a Matemática foi o Método dos Fluxos, o seu trabalho de Cálculo usando métodos infinitesimais. Segundo Newton, a taxa de variação de um fluente x é o fluxo de x, e indicou por $\dot{x}$. Nesta ideia de taxa de variação, estava a essência da fundamentação do cálculo, a teoria dos limites, que será desenvolvida quase dois séculos mais tarde. Ele formulou regras e procedimentos sistemáticos, procurando soluções gerais para a maioria dos problemas relacionados ao Cálculo Infinitesimal. (SOUZA, 2001. p. 21).

Segundo Newton, na taxa de variação estava a essência da fundamentação do Cálculo, que desenvolveria a teoria dos limites dois séculos mais tarde.

As obras de Newton sobre o Cálculo ficaram abandonadas por quase meio século, pois ele era reservado em suas comunicações e era difícil na época a publicação de trabalhos matemáticos complexos. Apesar do receio das controvérsias e críticas, mesmo assim, pressionado pelo astrônomo Edmond Halley, Newton publicou o *Principia Mathematica*, onde tornou pública sua versão do Cálculo. Anteriormente, ele já havia exposto suas primeiras ideias sobre o Cálculo. Mostrou que a área sob a curva $z = pax^{p-1}$ (para $p \in Q$) é $y = ax^p$. Este resultado aponta para a integral como inverso da derivada.

As séries infinitas foram indispensáveis para Newton para o desenvolvimento da quadratura de curvas. Ele também foi capaz de calcular a integral de expressões que envolviam raízes, mediante a expansão em série, integrando-as termo a termo. Por conseguinte, Newton assume a noção de convergência de James Gregory e menciona constantemente a necessidade do assegurar que o tempo deva ser suficientemente pequeno.

Newton também experimentou tipos de notações e formas de demonstrações, baseando suas ideias em problemas de geração de curvas por movimentos, chamando o espaço percorrido de fluente e a velocidade do móvel de fluxão. Para explicar as naturezas das curvas, com vista ao espaço percorrido, ele propôs que qualquer movimento local fosse acelerado ou retardado.

Embora Newton pensasse que x e y variavam com tempo, ele terminou com uma interpretação puramente geométrica das fluxões, a qual não depende do tempo. Ele precisava da noção de tempo apenas como uma ajuda mental para cristalizar suas ideias. Newton então aplicou seu método a numerosas curvas encontrando suas inclinações, seus pontos mais altos e mais baixos e seus pontos de inflexão, todas propriedades geométricas relacionadas com a linha tangente. Devido a essa associação com a tangente, o processo de encontrar a fluxão de um determinado fluente era conhecido, na época de Newton, como problema de tangente. Atualmente, chama-se esse processo de diferenciação e a fluxão de uma função chama-se de derivadas. (MAOR, 2008, p. 105).

A invenção do Cálculo foi o evento singular mais importante da Matemática desde que Euclides reunira a estrutura da geometria clássica em seus *elementos*, 2000 anos antes. Ela mudaria para sempre o modo como os matemáticos pensam e trabalham, e seus métodos poderosos afetariam todos os ramos da ciência, pura e aplicada. No entanto, Newton, que tinha uma aversão ao envolvimento em controvérsias não publicou seus resultados. Ele meramente comunicou, de forma informal, aos seus alunos e colegas mais chegados em Cambridge. (MAOR, 2008, p. 109).

Assim, por mais de meio século, o mais importante desenvolvimento da Matemática moderna permaneceu conhecido, na Inglaterra, apenas por um grupo de acadêmicos estudantes reunidos em Cambridge. (MAOR, 2008, p. 110).

Gottfried Wilhelm Leibniz, o grande gênio universal do século XVII e rival de Newton na invenção do cálculo, nasceu em Leipzig na Alemanha em 1646, filósofo, cientista, matemático e diplomata alemão, faleceu em 1716. Para Leibniz, a ideia central do Cálculo era a diferencial, que para ele, era uma diferença entre dois valores infinitamente próxima de uma variável. Sendo Leibniz mais preocupado do que Newton com os símbolos, fórmulas e regras, ele cria as notações: dx, dy, para as diferenciais de x, y, respectivamente.

Figura 18: Gottfried Wilhelm Leibniz – 1646 – 1716. (EVES, 2011. p. 442).

Leibniz criou também o símbolo ∫, um S alongado, que indica a soma de todas as áreas infinitesimais. Mostrou que $\int y\,dx$ corresponde a uma área e que $d\int y\,dx = y\,dx$, apresentando d como inverso de $\int$.

No desenvolvimento do Cálculo, Leibniz partiu de algumas premissas, como a *characteistica generalis* (características gerais), sequência de diferenças, triângulos característicos, a transmutação, sendo que as características gerais direcionaram os raciocínios de Leibniz, pois constituem uma linguagem matemática através de símbolos. Assim, ele pôde traduzir todos os seus raciocínios e argumentações. Essas características gerais foram muito importantes para o desenvolvimento do Cálculo e se tornaram imprescindíveis para Leibniz em suas demonstrações. Segundo Leibniz, “uma vez traduzido um problema em linguagem matemática simbólica, a aplicação das regras conduzirá quase mecanicamente a sua solução”. (Baron, 1985. v 3, p. 43).

Apesar de existir uma polêmica ao longo da história, Newton e Leibniz seguiram linhas diferentes no desenvolvimento do Cálculo, chegando na mesma teoria por desenvolvimentos independentes.

Por isso, quando Leibniz, um dos principais filósofos matemáticos da Europa, publicou sua versão do Cálculo em 1684, poucos matemáticos no continente duvidaram de que sua invenção fosse original. Somente 20 anos depois é que surgiram dúvidas quanto a se Leibniz teria tomado algumas das ideias de Newton. Todas as consequências da relutância de Newton agora tornavam-se evidente. A disputa de prioridade enviou ondas de choques que ecoariam por toda comunidade científica durante os 200 anos seguintes. (MAOR, 2008, p. 110).

Após a época de Newton e Leibniz, o progresso na fundamentação do Cálculo foi quase inexistente, por um período de quase 150 anos.

3.5 – O Cálculo na Idade Contemporânea

Pickover (2011, p. 160) relata que foi matemático francês Guillaume François Antoine (1661–1704), o Marquês de L’Hospital quem publicou o primeiro livro sobre Cálculo, em 1969, sob o título Analyse des infiniment petits, pour l’intelligence des lignes courbes, que pode ser traduzido como “Análise dos infinitamente pequenos, para a compreensão das curvas”. Um dos assuntos do livro de L’Hospital é a apresentação de um método que permite calcular o valor limite de uma fração onde o denominador e o numerador tendem simultaneamente a zero ou ao infinito, que ficou conhecida como Regra de L’Hospital. O objetivo do autor com a sua obra era “... que o livro fosse um veículo para promover a compreensão das técnicas do cálculo diferencial”.

Figura 19: Marquês De L’Hospital. (EVES, 2011. p. 445).

Devlin (apud PICKOVER, 2011, p. 160) declara que “De facto, até ao aparecimento do livro de L’Hôpital, Newton, Leibniz e os irmãos Bernoulli eram realmente as únicas pessoas à face da Terra que tinham sólidos conhecimentos em cálculo”. Outro matemático que enaltece a obra de L’Hospital é Ball (apud PICKOVER, 2011, p.160): “O crédito de juntar o primeiro tratado que explicava os princípios e a utilização do método é devido a L’Hopital... Este trabalho foi amplamente difundido; generalizou o uso da notação diferencial em França, e contribuiu para torna-lo conhecido na Europa”.

Após o falecimento de L’Hospital, Johann Bernoulli, tornou público o acordo realizado entre ambos, sobre o uso dos estudos de Bernoulli, reclamando que muitas das descobertas publicadas por L’Hospital eram suas (PICKOVER, 2011). Como Johann já possuía várias desavenças que eram de conhecimento do público, inclusive com seu irmão Jacques, não lhe foi dado crédito. O reconhecimento de que Johann foi autor da Regra de L’Hospital aconteceu somente em 1922, quando foi encontrada uma cópia do curso de Bernoulli para o marquês de L’Hospital. (PIEHOWIACK, 2008).

Piehowiak (2008) traz mais um nome importante da família Bernoulli para a história do cálculo. É Daniel Bernoulli (1700–1782), filho de Johann Bernoulli. Daniel foi um grande matemático, apesar de ser formado em medicina, como o pai, e aplicou a física-matemática para se doutorar em medicina. O seu maior mérito na área do cálculo foi o fato de ter aceito e utilizado as teorias de Newton em conjunto com o cálculo de Leibniz, o que contribuiu muito para o desenvolvimento da Física-Matemática. Daniel também foi um precursor no campo das equações diferenciais parciais.

Por volta de 1700, a maior parte do cálculo que hoje se vê nos cursos de graduação já havia sido estabelecida, juntamente com alguns tópicos mais avançados. (EVES, 2004).

O matemático francês Jean Le Rond D'Alembert (1717–1783) afirmou que fora dada "maior atenção a aumentar o edifício (da Matemática) do que a iluminar sua entrada, a elevá-lo mais alto do que fortalecer suas fundações" (GARBI, 2009, p. 299). D'Alembert foi um dos primeiros a afirmar que a ideia das grandezas infinitesimais como fundamento para os cálculos era muito frágil, e tentou substituí-la pelo conceito de limites.

Figura 20: Jean-le-Rond D'alembert. (EVES, 2011. p. 478).

Maria Gaetana Agnesi nascida em Milão em 1718, foi linguista, filósofa e matemática. Agnesi faleceu em 1799. Esta foi autora da primeira obra a unir as ideias de Isaac Newton e Gottfried Leibniz; escreveu também um dos primeiros livros sobre Cálculo Diferencial e Integral. É dela também a autoria da chamada "curva de Agnesi" em 1748.

Figura 21: Maria Gaetana Agnesi. (EVES, 2011. p. 480).

O italiano Joseph Louis Lagrange (1736–1813) foi o primeiro grande matemático a reconhecer a precariedade dos fundamentos da análise, e se empenhou para atingir o rigor necessário, influenciando as pesquisas matemáticas posteriores (EVES, 2004).

Figura 22: Joseph Louis Lagrange. (EVES, 2011. p. 485).

O cálculo de variações é considerado a maior contribuição de Lagrange para o cálculo. Lagrange publicou sua obra apoiado pelo suíço Leonhard Euler (1707–1783), matemático que deixou diversos trabalhos significativos em muitos ramos da matemática. Euler e Lagrange são considerados os maiores matemáticos do século XVIII (GARBI, 2009).

Figura 23: Leonhard Euler. (EVES, 2011. p. 472).

O conceito de função ganha destaque no processo de formalização do Cálculo, ocorrido durante o século XIX, chamado de idade do rigor na Matemática. E a partir desse conceito, Cauchy, Weierstrass e Dedekind introduzem os conceitos formais de limite e de derivadas.

Figura 24: Augustin-Louis Cauchy. (EVES, 2011. p. 531).

Os matemáticos antigos lidaram com a ideia de aproximação e limites de modo intuitivo por dois séculos. Percebiam a falta do mesmo nível de rigor ensinado pelos gregos antigos para poderem justificar formalmente os procedimentos, e até mesmo evitar contradições e erros que fizeram, mas a humanidade precisou esperar até o século XIV, para que este rigor fosse finalmente encontrado pelo francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857), que criou uma definição formal de limite. Os estudos de Cauchy foram incompletos mas muito importantes por terem dado início à investigação sobre os fundamentos do Cálculo Integral, levando ao desenvolvimento da Análise Matemática e da teoria das funções.

Conhecido como "Apóstolo do Cálculo", pelo seu rigor nas demonstrações matemáticas, o também Cauchy, provou que D'Alembert estava correto, mostrando que era possível fundamentar o Cálculo sem utilizar as grandezas infinitesimais utilizando a noção de limite, que, Cauchy definiu como: "Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo de modo que difiram dele por uma quantidade tão pequena quanto quisermos, aquele valor é chamado limite de todos os outros. (GARBI, 2009. p. 299).

> O tratado de Cauchy abre com uma definição clara da derivada. (...) Stephen Howking escreveu: 'Cauchy (...) definiu a derivada de f em x como o limite da diferença do coeficiente, à medida que i se aproxima de zero, que é a nossa definição moderna e não geométrica da derivada. (PICHOVER, 2011, p. 220).

A definição de limite de Cauchy ainda continha expressões vagas e foi aperfeiçoada pelo alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), chegando à definição que é utilizada ainda hoje: "uma função $f(x)$ tem por limite o valor L no ponto $x = x_0$ se, dado ε tão pequeno quanto se queira, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - L| < \varepsilon$." (GARBY, 2009, p. 299). "Weierstrass tornou-se sinônimo de 'raciocínio extremamente cuidadoso' (...) e tornou-se conhecido como 'o pai da análise moderna'" (EVES, 2004, p. 613).

Figura 25: Karl Weierstrass. (EVES, 2011. p. 612).

A ideia ou o conceito de integral foi formulado por Newton e Leibniz no século XVII, mas a primeira tentativa de uma conceituação precisa foi feita por volta de 1820, também por Cauchy.

Eves (2004) afirma que o responsável pela definição de integral que é utilizada até hoje é o alemão Bernhard Riemann (1826-1866). Por volta de 1854, Riemann realizou um estudo bem mais aprofundado sobre a integral e, em sua homenagem, a integral estudada por ele passou a receber o nome de Integral de Riemann. Tal nome serve para distinguir essa integral de outras que foram introduzidas mais tarde, como por exemplo, a Integral de Lebesgue.

Figura 26: Georg Riemann. (EVES, 2011. p. 613).

A forma usada para introduzir o conceito de Integral de Riemann nos cursos de Cálculo é a versão devida a Cauchy. O que justifica isto é que ela é simples e bastante acessível aos alunos de um curso inicial de Cálculo, além de atender aos propósitos de um curso desta natureza. Nos cursos de Análise Matemática, apresenta-se uma versão mais refinada, a Integral de Darboux-Riemann, usando os conceitos de soma inferior, soma superior, integral inferior e integral superior, que correspondem ao Método de Exaustão usando, respectivamente, polígonos inscritos e polígonos circunscritos. Mas, para que ninguém alimente ideias equivocadas, observamos que as diversas definições da Integral de Riemann mencionadas são equivalentes e a diferença entre elas se situa na adequação das definições para a obtenção das propriedades da referida integral.

Já no século XIX, o Cálculo foi abordado de uma forma muito mais elaborada. Foi também durante este período que as ideias do Cálculo foram generalizadas ao espaço euclidiano e ao plano complexo. Henri Lebesgue nasceu em 1875 na França, generalizou a noção de integral.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A história do Cálculo Diferencial e Integral deve ser explorado pelo aluno, pois esclarece ideias matemáticas e contribui para a construção de um olhar mais crítico sobre o seu aprendizado.

Os conhecimentos da história do Cálculo permitem uma melhor compreensão de como chegar às informações atuais e porque deve-se ensinar este ou aquele conteúdo.

Conhecer os matemáticos e a dedicação de cada um deles em explorar novas ideias, mesmo partindo de insuficientes informações conseguiram desenvolver teorias e conceitos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral. Isso leva aos alunos a perceberem que também podem permear o mesmo caminho.

Acompanhando o processo histórico da matemática podemos perceber que o Cálculo Diferencial e Integral não surgiu pronto e acabado na cabeça de um único homem. O Cálculo tem uma história de um longo desenvolvimento que inicia-se na antiguidade e estende-se até os tempos modernos. Com o destaque de dois grandes matemáticos Newton e Leibniz.

O Cálculo tornou-se uma disciplina indispensável na formação científica do homem contemporâneo, os conhecimentos que se adquire num curso de Cálculo Diferencial e Integral capacita o aluno a analisar e resolver diversos problemas. Conhecer a história do Cálculo e como ela se desenvolveu é participar da sua reconstrução e reconhecer seu valor para a Educação Matemática da atualidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVARENGA, Mauro Lopes. **O MÉTODO DE EXAUSTÃO E SUA CONTRIBUIÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO**. Universidade Católica de Brasília. Taguatinga – DF. Disponível em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/tcc/12006/maurolopesalvarenga.pdf>. (Acesso em 10 abr. de 2016).

BARON, Margaret E. **Coleção Curso de História da Matemática (Origem e Desenvolvimento do Cálculo**. Trad. José Raimundo Braga Coelho. Editora Universidade de Brasília: 1985.

BIZELLI, Maria Helena S. S. **Aplicações da Derivada**. Disponível em: <http://www.calculo.iq.unesp.br/Calculo1/DerivadaDizSobreFuncaof.htm>. (Acesso em 28 out. de 2016).

BRITO, Janilson Claydson Silva. **O Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta interdisciplinar no Ensino Médio**. Teresina: PROFMAT, 2013. Disponível em: <http://www.seduc.pi.gov.br/arquivos/80089229.janilson_claydson_silva_brito.pdf>. (Acesso em 10 abr. de 2016).

CARVALHO, Romeu Manuel de. **A invenção do Cálculo por Newton e Leibniz e sua evolução para o Cálculo Contemporâneo**. Belo Horizonte: 2007. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_Romeu.pdf> (Acesso em 10 abr. de 2016).

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução HYGINO H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FLEMMING, Diva Marília; LUZ, Elisa Flemming; WAGNER, Christian. **Cálculo I**. 4 a ed. rev., Palhoça: Unisulvirtual, 2006.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

GARZELLA, Fabiana A. Colombo. **A DISCIPLINA DE CÁLCULO**: ANÁLISE DAS RELAÇÕES ENTRE AS PRÁTICAS PEDAGÓGICAS DO PROFESSOR E SEUS IMPACTOS NOS ALUNOS. Campinas: UNICAMP, 2013. Jornal da UNICAMP, Campinas, Edição nº 581 – Ano 2013.

GASPERI, Wlasta N. H.; PACHECO, Edilson Roberto. **A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO INSTRUMENTO PARA A INTERDISCIPLINARIDADE NA EDUCAÇÃO**

BÁSICA. Publicado em 05 de Outubro de 2012. Disponívem em: < http://pt.slideshare.net/dalvamar/a-histria-da-matemtica-como-instrumento-para-a>. Acesso em 28 out. de 2016).

GODOY, L. F. S. de; FARIA, W. C. F. O cálculo diferencial e integral e suas aplicações no ensino de engenharia: uma análise de currículo. In: Congresso de Iniciação Científica do INATEL (INCITEL), 2012, Santa Rita do Sapucaí. **Anais...** Santa Rita do Sapucaí (MG): Instituto Nacional de Telecomunicações (INATEL), 2012.

GOMES, E. Ensino e aprendizagem de cálculo na engenharia: um mapeamento das publicações nos COBENGEs. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós – Graduação em Educação Matemática, 16, Canoas. **Anais...** Canoas: ULBRA, 2012

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3ª ed. 1 Vol. São Paulo: Harbra, 1994.

MAOR, Eli. ***e*: A história de um número**. Tradução de Jorge Calife. 4ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MARQUES, Jair Mendes. **Matemática Aplicada**. 5. tir.Curutiba: Juruá, 2006.

MELCHIORS, Angeline; SOARES, Maricélia. **HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**. 2013.

PORTANOVA, Ruth. **História da Matemática: um recurso metodológico?** PUCRS, 2004. Disponível em: < http://www.sbmac.org.br/cnmacs/2004/cd_cnmac/files_pdf/10494a.pdf>. (Acesso em 28 out. de 2016).

ROCHA, Alex; et al. **Tópicos de matemática aplicada**. Curitiba: InterSaberes, 2013.

SANTANA, Anderson, Marcolino de. **Aplicação das Derivadas**. UNIR. JI-Paraná: 2010. Disponível em: < http://www.dmejp.unir.br/menus_arquivos/1787_anderso_marcolino.pdf>. (Acesso em 21 set. de 2016).

SANTIAGO, Emerson. **Al-Khwarizmi**. <http://www.infoescola.com/biografias/al-khwarizmi/>. (Acesso em 28 out. de 2016).

SCHENDER, Klim Wertz. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**: A importância no processo do Ensino-aprendizagem na Educação Básica. Santos: 2013.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Limite de uma Função**. <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/limite-uma-funcao.htm>. (Acesso em 28 out. de 2016)

______, **Limite de uma Função**. < http://brasilescola.uol.com.br/matematica/limite-uma-funcao.htm>. (Acesso em 28 out. de 2016).

SOUZA, Veriano Cantinin de. **A ORIGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**. Rio de Janeiro: 2001. Disponível em: <http://www.avm.edu.br/monopdf/4/VERIANO%20CATININ%20DE%20SOUZA.pdf>. (Acesso em 10 abr. de 2016).

STEWART, James. **Cálculo**. volume I. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

THOMAS, George B. [et.al.]. **Cálculo**. volume 1, 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

<http://www.qfojo.net/criarMais/deriv/derivadas.htm>. (Acesso em 10 abr. de 2016).