UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI – UFSJ
NÚCLEO DE EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – DEMAT

PATRÍCIA FERREIRA DA SILVA

HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

São João del Rei/MG
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI – UFSJ
NÚCLEO DE EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – DEMAT

PATRÍCIA FERREIRA DA SILVA

HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de São João del Rei - UFSJ, como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Matemática.

Orientador: Andréia Malacarne

São João del Rei/MG
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI – UFSJ
NÚCLEO DE EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – DEMAT

PATRÍCIA FERREIRA DA SILVA

HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de São João del Rei - UFSJ, como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Matemática.

Os componentes da banca de avaliação, abaixo identificados, consideram este trabalho aprovado.

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dra. Andréia Malacarne
Universidade Federal de São João del-Rei

Prof.º Dr. Eugenio Afonso Pinto Merhi
Universidade Federal de São João del-Rei

Data da aprovação: São João del-Rei, 26 de novembro de 2016.

SUMÁRIO

RESUMO

Os números complexos são aplicados em uma variedade de situações dentro das Ciências Exatas, mas é um tema pouco abordado na Matemática do Ensino Médio. A história dos números complexos pode ser uma grande aliada do processo de ensino e aprendizagem da teoria desses números. Assim, este trabalho objetiva pesquisar sobre a história dos números complexos e como eles foram aplicados desde o seu surgimento até os dias atuais. Esse desenvolvimento histórico partirá das ideias dos antigos babilônicos, que já conseguiam resolver determinadas equações de 2º grau, passando pelos matemáticos europeus, tais como: Cardano, Tartaglia, René Descartes e Gauss, até chegar ao momento em que esses números ganhassem a estrutura pela qual são conhecidos hoje.

Palavras-chave: Números Complexos; História.

ABSTRACT

Complex numbers are applied in a variety of situations within the Exact Sciences, but it is a subject little addressed in High School Mathematics. The history of complex numbers can be a great ally of the process of teaching and learning the theory of these numbers. Thus, this work aims to investigate the history of complex numbers and how they were applied from its emergence to the present day. This historical development will start from the ideas of the ancient Babylonians, who were already able to solve certain second-degree equations, including European mathematicians such as Cardano, Tartaglia, René Descartes and Gauss, until such time as these numbers gained the structure by which Are known today.

Keywords: Complex Numbers; History.

INTRODUÇÃO

Um número complexo é aquele que pode ser escrito na forma a+bi, em que a e b são números reais e i é tal que $i^2 = -1$. Portanto, podemos escrever a notação $i = \sqrt{-1}$.

Os números complexos surgiram para tornar possível a raiz quadrada de um número negativo e, consequentemente, toda equação de segundo grau passou a ter raízes.

Com o acréscimo do número i aos números reais, originando as raízes $\pm$ i da equação $x^2 + 1 = 0$, os números complexos passaram a ser suficiente para dotarem de raízes qualquer equação, seja do 3º, do 4º, do 5º ou de todos os demais graus. Portanto, a invenção de números novos para que existissem raízes em todas as demais equações algébricas se tornou desnecessária, independente do grau da equação.

> Este fato somente já é responsável em boa parte pela relevância matemática dos números complexos, indispensáveis em Álgebra Linear, Equações Diferenciais e em várias situações nas quais, mesmo que se desejem estudar apenas questões relativas a números reais, é indispensável considerar números complexos para se obter a solução real desejada. [...]
>
> Não se julgue, entretanto, que a importância dos números complexos ressalta apenas do Teorema Fundamental da Álgebra. Eles se fazem presentes em praticamente todos os grandes ramos da Matemática, como Álgebra, Teoria dos Números, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, Equações Diferenciais e em aplicações como Física, Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo, etc. A Teoria das Funções de Variável Complexa é uma área nobre, de grande tradição matemática e, ao mesmo tempo, com notável vitalidade, refletida na imensa atividade de pesquisa que se desenvolve nos dias atuais. (LIMA, 1991, p. 31-32)

Frequentemente, os números complexos são associados à resolução de equações de segundo grau cujas soluções são expressas por raízes quadradas de números negativos. Entretanto, a necessidade de se introduzir o Conjunto dos Números Complexos surgiu, historicamente, de problemas envolvendo a resolução de equações de terceiro grau.

> Muitos professores e livros didáticos introduzem o estudo dos números complexos com a resolução de equações quadráticas de raízes não reais. No entanto, historicamente, essas equações não motivaram a "descoberta" desse novo conjunto numérico. Essa descoberta foi motivada pela resolução das equações cúbicas. (Chagas, 2013, p. 13)

Os números complexos fazem parte do currículo da Matemática, como é reconhecido nas Orientações Educacionais Complementares que compõem os Parâmetros Curriculares Nacionais, mas não são considerados um tema indispensável e pode "ser tratado na parte flexível do currículo das escolas", já que “isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área" (BRASIL, 2007, p.122).

Na prática em sala de aula, quando se fala em números complexos, a maioria dos alunos logo imagina que são números complicados, de difícil compreensão. Talvez isto ocorra porque esses números são abordados, em geral, somente no final do Ensino Médio e os professores, muitas vezes, sentem-se inseguros quanto ao modo de apresentá-los, como conectá-los a outros temas matemáticos, qual a sua importância e quais as suas aplicações.

Um dos fatores que pode contribuir no processo de ensino-aprendizagem de teorias matemáticas é o conhecimento dos “problemas” que envolveram o seu surgimento e o seu desenvolvimento.

> Estudar história da Matemática não é apenas buscar as origens dos conhecimentos matemáticos que temos atualmente. Devemos ver a Matemática de uma outra época a partir do ponto de vista do que ela representava para os matemáticos da época em questão e, para isso, temos que perceber os problemas que caracterizavam o modo de pensamento em um contexto cultural, social e filosófico. (Pinto Júnior, 2009, p. 9)

Nos últimos anos, a história da Matemática tem assumido um papel de forte aliada do processo de ensino-aprendizagem, constituindo novas práticas e metodologias. A disciplina de História da Matemática está presente em cursos de graduação de Licenciatura em Matemática, em alguns cursos pós-graduação e na formação continuada de professores, contudo, é comum verificar que muitos professores de Matemática, no exercício de sua profissão, não tiveram contato com essa disciplina ou apresentam dificuldade em utilizar os fatos históricos como ferramenta de apoio ao ensinar os conceitos. Além disso, vários livros didáticos ainda buscam a melhor forma de oferecer uma opção para o trabalho com conceitos matemáticos à luz do processo histórico no qual estão inseridos.

Por isso, o presente Trabalho de Conclusão de Curso busca discutir justamente a história dos Números Complexos, desde o seu surgimento para resolução de equações cúbica até a sua utilização por engenheiros com sede de desenvolvimento. Além disso, fez-se uma análise de alguns livros didáticos como forma de comparar a abordagem, a apresentação e o estudo epistemológico dos números complexos, bem como a forma com que cada um dos livros relaciona esses números com o cotidiano vivido pelos alunos.

A metodologia adotada para produção deste trabalho é qualitativa através da revisão bibliográfica de artigos, livros, dissertações e monografias que abordam o tema escolhido.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: no capítulo 1, falaremos sobre a história da criação dos números complexos. Inicialmente, apresentaremos a história das raízes “rejeitadas” das equações do 2º grau, desde a antiguidade até o estudo sobre a fórmula de Bhaskara Akaria. Em seguida, abordaremos a questão das raízes cúbicas propostas por Cardano e Tartaglia. Encerramos este capítulo mostrando a abordagem dos números complexos na modernidade e a representação destes pela Geometria. No 2º capítulo, falaremos sobre o uso dos números complexos na atualidade e sua aplicação nas Ciências Exatas. Para finalizar, analisaremos como os livros didáticos de Matemática abordam o tema “números complexos”. Será apresentado um quadro comparativo de três livros de editoras diferentes.

1 – COMO SURGIRAM OS NÚMEROS COMPLEXOS

A análise das raízes das equações do 2º grau não foi a base para o surgimento da teoria dos números complexos, sendo esta apenas uma forma que os autores encontraram para facilitar o entendimento destes números pelos alunos do segundo grau. Os números complexos tiveram sua teoria construída a partir das soluções das equações de 3º grau.

1.1 – As raízes “rejeitadas” das equações 2º de grau

Os estudiosos da Matemática sempre foram fascinados pela resolução de equações. As equações do 2º grau já apareciam há mais de quatro mil anos, em textos escritos em papiros no Egito e em placas de argila na Mesopotâmia. Os povos antigos da Babilônia já utilizavam o chamado “complemento de quadrado” para resolver determinadas equações do 2º grau.

A régua e o compasso eram utilizados pelos matemáticos gregos da antiguidade para resolver alguns tipos de equações do 2º grau. Estes são considerados por muitos o povo que deu maior importância ao desenvolvimento da Matemática.

Durante a Idade Média, o desenvolvimento da Matemática deixou de ser prioridade para os gregos, que foram dominados pelos romanos e depois passaram a pertencer aos árabes e hindus. Os babilônios foram os primeiros a fazerem o registro das equações polinomiais do 2º grau, pois possuíam uma consciência algébrica bem desenvolvida e já resolviam esse tipo de equação através de métodos semelhantes aos atuais, usavam o método de completar quadrados. Nessa época, não se falava em raízes negativas, pois isso não fazia sentido algum, já que os problemas eram resolvidos através de interpretação geométrica; uma equação algébrica era interpretada apenas como a formulação matemática de um problema concreto, logo, se durante o processo de resolução da equação surgia uma raiz quadrada de um número negativo, isto era interpretado simplesmente como uma indicação de que o problema não possuía solução.

Um exemplo desta atitude é encontrado na obra *Arithmetica* de Diofanto de Alexandria (~200 d.C. - ~284 d.C.). Aproximadamente no ano de 275 d.C., Diofanto considerou o seguinte problema: “Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades. Encontre o comprimento dos seus lados”.

Chamando x e y o comprimento dos catetos desse triângulo temos, na nossa notação atual,

$$\frac{1}{2}xy = 7 \text{ e } x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2.$$

Substituindo y em função de x, obtemos a equação

$$24x^2 + 172x + 336 = 0,$$

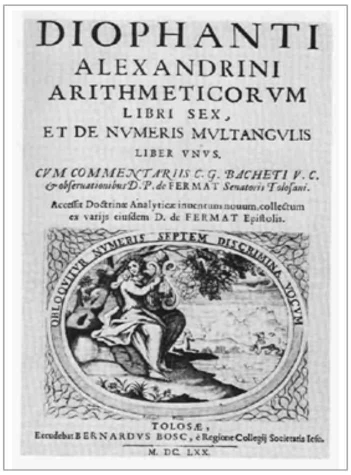
cujas raízes são

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Diofanto concluiu, então, que só poderia haver solução se

$$\left(\frac{172}{2}\right)^2 \geq 24 \times 336,$$

o que implicava a não existência do triângulo procurado. Neste contexto, não havia necessidade alguma de introduzir um sentido para a expressão $\sqrt{-167}$.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Figura 1: Obra *Arithmetica* de Diofanto traduzida para o latim por Bachet, em 1620.

Fonte: www.biografiaecuriosidade.blogspot.com.br

A famosa fórmula para resolução das equações de 2º grau, conhecida como Fórmula de Bhaskara, em homenagem ao matemático indiano Bhaskara Akaria (1114-1185) foi, na realidade, resultado de contribuições de diversos matemáticos, com destaque ao matemático hindu Sridhara (séc. XI d.C.). As contribuições de

Sridhara para a resolução das equações de grau 2 ocorreram, pelo menos, um século antes da publicação de Bhaskara. Na realidade, a Fórmula de Bhaskara só adquiriu a forma como a conhecemos atualmente após quatro séculos da morte de Bhaskara, pois até então não existia a notação usual de hoje. A representação dos coeficientes de uma equação por letras se deu a partir dos trabalhos de François Viète (1540-1603) e René Descartes (1596-1650).

> A Matemática hindu produziu, até o Renascimento, grandes personagens, dentre os quais destacam-se Aryabhata (séc. VI d.C.), Brahamaguta (séc. VII d.C.), Sridhara (séc. XI d.C.) e Bhaskara (1114-1185), que muito contribuíram para a resolução da equação de 2º grau. Segundo o próprio Bhaskara, a regra que usava e que originou a fórmula atual era devido a Sridhara, e curiosamente, é chamada, somente no Brasil, de Fórmula de Bhaskara. (Pedroso, 2010, p. 6)

Veja como a fórmula de Bhaskara expressa as raízes da equação $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ = ***0,*** onde ***a ≠ 0:***

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad e \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Nessa época, as resoluções dos problemas eram interpretadas geometricamente e, portanto, não fazia sentido falar em raízes negativas.

Bhaskara escreveu, por exemplo, durante o século XII d.C.: “O quadrado de um positivo é positivo; e a raiz quadrada de um positivo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado.”

1.2 – As raízes das equações de 3º grau: a “Fórmula de Cardano” de Tartaglia

No século XVI, a Europa retomou seu interesse pelos estudos matemáticos, principalmente na Itália. Questões perturbadoras surgiram e não podiam mais ser deixadas de lado: operações com números negativos. Tornou-se necessário analisar como deveriam ser extraídas as raízes quadradas de números negativos e também raízes cúbicas dos números considerados de natureza não conhecida. Os matemáticos passaram a perceber que algumas equações de 3º grau tinham soluções reais, mesmo quando no desenvolvimento da solução apareciam raízes quadradas de números negativos, ao contrário das equações de 2º grau de Bhaskara.

Nesta época, era comuns duelos entre os matemáticos, que consistiam em questões apresentadas por um matemático desafiador que deveriam ser solucionadas pelos seus desafiados.

Alguns estudiosos da Matemática consideram que o primeiro a resolver, através da Álgebra, a equação cúbica $x^3 + mx = n$ foi o matemático italiano Scipione del Ferro (1465-1526). Por volta de 1510, Scipione del Ferro conseguiu resolver as equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Infelizmente, ele não teve tempo de publicar sua descoberta, pois morreu precocemente.

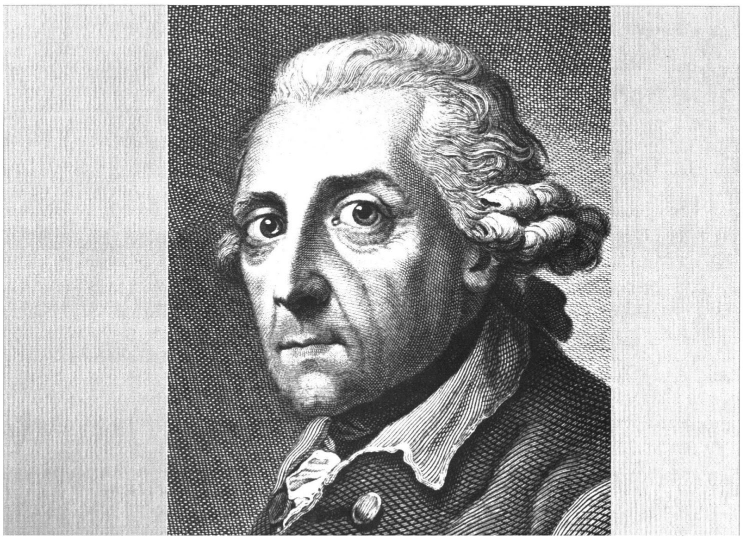


Figura 2: Scipione del Ferro
Fonte: imagens do Google

Antônio Maria Fior (século XV - século XVI) era aluno de Del Ferro e tinha conhecimento da solução encontrada por seu professor. Visando se tornar respeitado entre os intelectuais, Fior desafiou o matemático italiano Niccolò Fontana (1500 - 1557), que era conhecido como Tartaglia, para solucionar a equação de Del Ferro.

A escolha de Fior foi proposital, já que Tartaglia ainda não sabia resolver tais equações. Porém, Tartaglia, que tinha confiança em seu potencial, acabou por deduzir a resolução da equação que lhe foi apresentada e ainda resolveu as equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$, humilhando, assim, seu desafiador.

> Com isto, Tartaglia tornou-se mais famoso, o que o levou a escrever em suas memórias: "*Mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1531".* (Garbi, 2006)

Figura 3: Antonio Maria Fior

Fonte: Imagens do Google

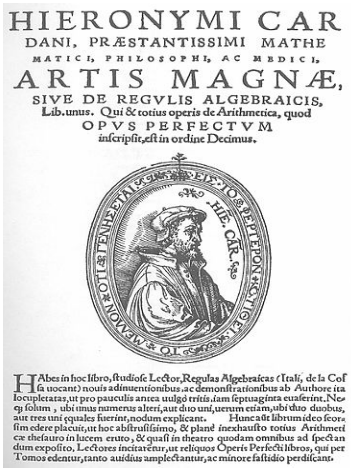
O matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576), ao saber que Tartaglia havia encontrado a solução das equações de 3º grau, propôs a publicação de tal feito em seu livro *Ars Magna,* sem divulgar a solução. Depois de muitas conversas, Tartaglia cedeu ao pedido e revelou a solução das equações de 3º grau, mas não deu permissão para que esta fosse divulgada.

Como era comum naquela época a quebra de promessas, Cardano não só publicou a fórmula de Tartaglia, em 1545, como ganhou a notoriedade que deveria ser deste, ficando a fórmula conhecida, até os dias de hoje, como "Fórmula de Cardano".

> Achando que se tratava de blefe, Fior desafiou Tartaglia para uma disputa pública envolvendo a resolução de equações cúbicas. Com

> muito empenho, Tartaglia conseguiu resolver também, faltando poucos dias para a disputa, a equação cúbica desprovida do termo quadrático. Como no dia marcado sabia resolver dois tipos de cúbicas, ao passo que Fior só sabia resolver um, Tartaglia triunfou plenamente. Mais tarde, Girolamo Cardano, um gênio inescrupuloso que ensinava Matemática e praticava medicina em Milão, depois de um juramento solene de segredo, conseguiu arrancar de Tartaglia a chave da solução cúbica. Em 1545, porém quando apareceu em Nuremberg a Ars Magna de Cardano, um grande tratado em latim de álgebra, lá estava a solução de Tartaglia da cúbica. (EVES, 2004)

A publicação de Cardano da resolução de equações cúbicas do tipo $x^3 + ax + b = 0$ é considerada o "marco inicial da história da Matemática moderna".



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib.unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni ęquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Figura 4: Página de rosto de *Ars Magna* de Cardano

Fonte: http://wwwrevistadomomento.blogspot.com.br

Porém, Cardano percebeu algo estranho quando aplicava o método a equação $x^3 = 15x + 4$, obtendo uma expressão envolvendo a $\sqrt{-121}$. Então, escreveu para Tartaglia em 4 de agosto de 1539, para tirar sua dúvida. Surge, então, o impasse da raiz quadrada de um número negativo. Tartaglia não soube explicar, então Cardano publicou sua solução que envolvia "números complexos" sem entendê-los, dizendo que isso era "tão sutil quanto inútil".

> A publicação da fórmula que permite determinar o conjunto-solução de equações cúbicas ocorreu em 1545, na obra Ars Magna, do matemático Girolamo Cardano, na qual o autor faz referência a um novo tipo de número, que denominou “quantidade fictícia”. Tais quantidades eram na realidade raízes quadradas de números negativos, hoje tratados como números imaginários. (SOUZA, 2010, p 228)

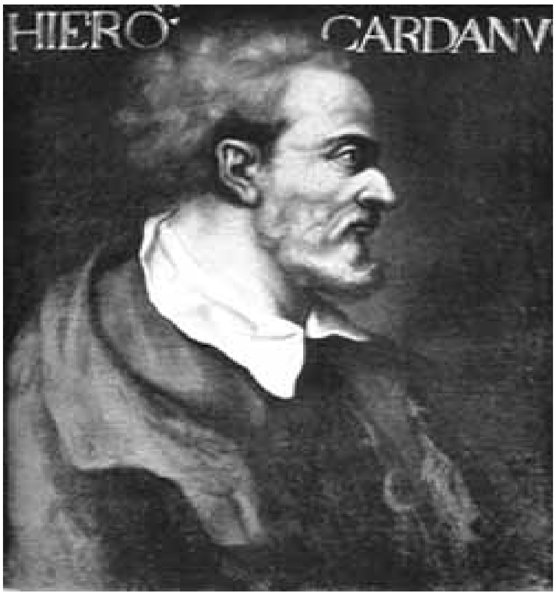


Figura 5: Girolamo Cardano (1501-1576) **Figura 6:** Tartaglia (1499-1557)

Fonte: http://livrozilla.com/download/151230

Abaixo, apresentaremos o desafio vencido por Tartaglia e sua solução. Considere a equação geral do 3º grau, $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, com a, b quaisquer. Mostraremos, inicialmente, que esta equação pode ser transformada numa equação do tipo $y^3 + py + q = 0$, fazendo uma substituição $y = x + m$, para algum m conveniente.

Tartaglia solucionou dois tipos especiais de equações cúbicas: $x^3 + px + q = 0$ e $x^3 + px^2 + q = 0$, e não a equação geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Mas, se fizermos uma substituição $x = y + m$ e calcularmos m de modo a anular o termo de 2º grau, reduzimos a equação completa em uma do tipo $y^3 + py + q = 0$.

Seja $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (1). Considerando $x = y + m$ obtemos que

$$a(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0,$$

e logo,

$$ay^3 + y^2(b + 3\,am) + y(3am^2 + 2bm + c) + (m^3a + bm^2 + cm + d) = 0.$$

Tomamos m de tal forma que

$$b + 3m = 0 \;\Rightarrow\; m = -\,b / 3a.$$

Portanto, se conseguirmos resolver a equação $y^3 + py + q = 0$ (2), podemos determinar a solução x da equação geral (1), fazendo $x = y + m$. Para isso, supomos que a solução Y da equação (2) é a soma de duas parcelas $Y = A + B$. Assim, temos que

$$Y^3 = (A + B)^3 \Rightarrow Y^3 = A^3 + B^3 + 3AB\,(A + B),$$

e como $Y = A + B$, obtemos que

$$Y^3 = A^3 + B^3 + 3AB\,Y \Leftrightarrow Y^3 - 3ABY - (A^3+B^3) = 0.$$

Mas $y^3 + py + q = 0$, então

$$p = -3AB \quad \text{e} \quad q = -\,(A^3+B^3).$$

Assim,

$$A^3B^3 = -\,p^3/27 \quad \text{e} \quad A^3 + B^3 = -\,q.$$

Portanto, $\mathbf{A^3}$ e $\mathbf{B^3}$ são as soluções da equação de grau 2

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Logo, concluímos que

$$A^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad e \quad B^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$\mathit{como}\ Y = A + B$$

$$Y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

1.3 - O estudo dos números complexos na modernidade

Dando continuidade a resolução da equação cúbica publicada por Cardano, Raphael Bombelli (1526 – 1573) publicou, em 1572, uma obra intitulada Álgebra. Ele utilizou, para resolver sua equação de raiz cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$, uma raiz de números negativos, o que não era aceito naquela época. Bombelli considerou a raiz quadrada de um número negativo como um número "imaginário" e desenvolveu algumas regras para trabalhar com esses números.

Figura 7: Álgebra de Raphael Bombelli

Fonte: Google

Em 1629, os matemáticos Albert Girard (1590 – 1633) e René Descartes (1596 – 1650) passaram a escrever raízes quadradas de números negativos.

> René Descartes escreveu no seu livro *Géométrie* a seguinte frase: "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias". Com esta citação ficou definido que o número raiz quadrada de -1 seria chamado de número imaginário e que poderia ser manipulado de acordo com as regras da álgebra. (GARBI, 1997, p. 75).

O matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) utilizou, em 1748, pela primeira vez a letra *i* para representar a raiz quadrada de -1. Ele estudou os números da forma $z = a + bi$ onde a e b são números e $i^2 = -1$.

Figura 8: Leonhard Euler

Fonte: http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/modulos/history/euler/euler.html

1.4 – Representação Geométrica e os Números Complexos

O matemático dinamarquês Gaspar Wessel (1745 – 1818) representou, em 1797, geometricamente o número complexo *a + bi,* fazendo uma correspondência objetiva entre estes e os pontos do plano. Porém, somente em 1806, é que tal correspondência foi publicada, pelo suíço Jean Argand (1768 - 1822).

A introdução de métodos mais modernos para operações entre números complexos, relacionando números complexos e trigonometria, foi feita por Abraham de Moivre (1667 – 1754).

Em 1798, o matemático Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) demonstrou em sua tese de doutorado que toda equação algébrica de grau n (n > 0) e coeficientes complexos, tem, pelo menos, uma raiz complexa. Tal teorema resolveu a questão das soluções de equações algébricas.

Em 1831, Gauss retomou as ideias publicadas por Argand e trabalhou com os números na forma a + b(raiz quadrada de -1) como coordenadas de um ponto em um plano cartesiano. E em 1832, Gauss introduz a expressão número complexo. O plano cartesiano no qual estão exibidos os números complexos é denominado plano complexo de ou plano de Argand-Gauss.

Finalmente, em 1833, o matemático William Rowan Hamilton (1805 – 1865) apresentou a multiplicação dos números complexos, da forma que a conhecemos atualmente. (Boyer, 1974).

Figura 9: Carl Friedrich Gauss

Fonte: http://carlgaussmatematico.blogspot.com.br/

2 – OS NÚMEROS COMPLEXOS NA ATUALIDADE

2. 1– Onde os Números Complexos são Aplicados

A necessidade de se trabalhar com vetor plano em Física, Geometria e Topografia, motivou o surgimento da representação geométrica dos números complexos, dando uma utilização mais ampla à teoria desses números. Isto ocorreu a partir do século XIX.

Benoit Mandelbrot (1924 — 2010) foi um matemático francês de origem judaico-polonesa que identificou entidades geométricas chamadas Fractais e que passaram a ser aplicadas através do uso de Números Complexos. De acordo com Dante (2010), um fractal é:

> Uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos, no qual permite desenhar (ou modelar) qualquer coisa (ou fenômeno) da natureza numa tela de computador (computação gráfica) (DANTE, 2010)

Secco (2004) ressalta que foi Von Koch (1904) o primeiro a utilizar as formas geométricas fracionárias como ferramentas descritoras das formas irregulares da superfície terrestre.

Outra área das Ciências Exatas que utiliza os Números Complexos é a engenharia Elétrica. Neste caso, esses números são usados para analisar circuitos de corrente alternada (CA). Aqui, considera-se como precursor o cientista alemão Hermann Von Helmholtz (1821 – 1824), sendo que Julis Berg (1871 – 1941) foi que a utilizou.

A expansão da indústria de energia elétrica nos Estados Unidos, no final do século XIX, aconteceu graças a Charles Proteus Steinmetz (1865 – 1923), que formulou teorias matemáticas para serem utilizadas pelos engenheiros obcecados pelo desenvolvimento, onde o mesmo comunicou que os números complexos são aplicados no estudo da corrente alternada.

Nikolai Yegorovitch Jukovsky (1847 - 1921), em 1906, utilizou os números complexos na aerodinâmica, quando transformou formas geométricas, através da construção de uma curva fechada, em um plano complexo representado em um perfil de uma asa de avião através do princípio de Bernoulli (1738) e da teoria das funções complexas.

Na Engenharia de Controle os números complexos podem ser utilizados, por exemplo, em um sistema de controle de quantidade de água e da taxa de saída. Veja o desenho a seguir (figura 10): ele mostra uma válvula que controla a taxa de entrada de água em um tanque e está evade para outro tanque:

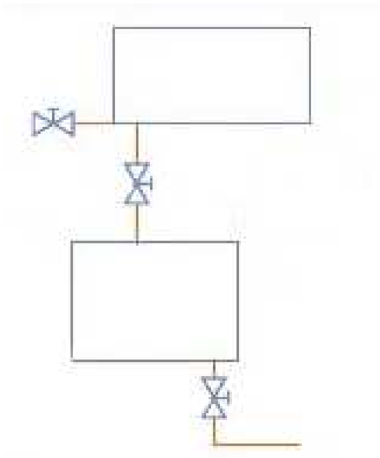


Figura 10: Válvula entre dois tanques

Fonte: Imagem do Google

Uma maneira de controlar o nível da água de cada também é através de um modelo matemático que utiliza os números complexos em um sistema que abre e fecha as válvulas através da eletricidade. Podemos ter duas opções gráficas dependendo do comportamento da função modelo:

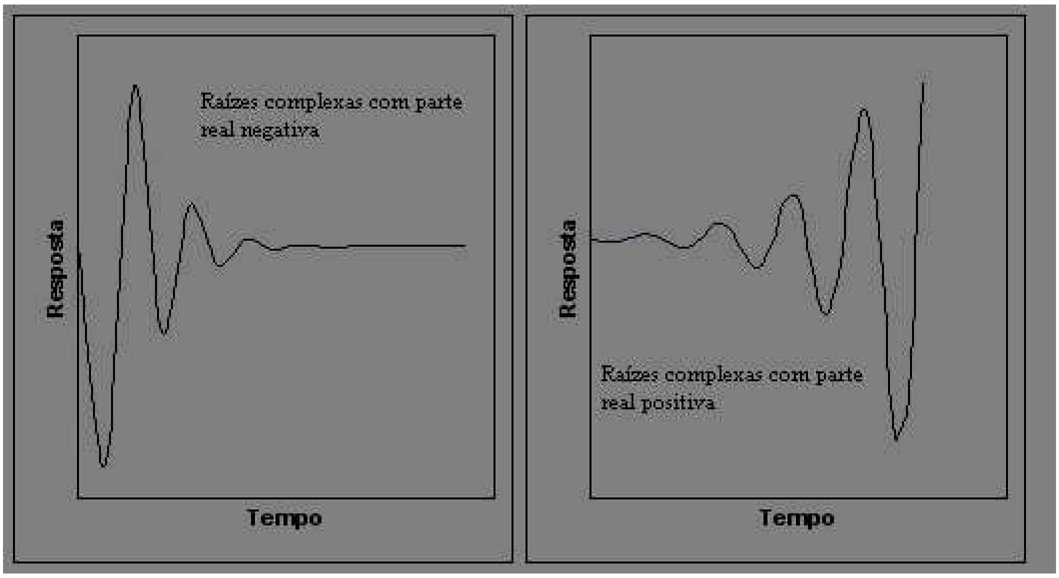


Figura 11: Gráficos da quantidade de água e a taxa de saída
Fonte: http://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/NC2.pdf

Podemos perceber que se o número complexo tiver uma parte real negativa, aumentando o tempo a resposta da função irá se estabilizar e convergirá para um valor. Se o número tiver uma parte positiva, aumentando o tempo haverá uma oscilação e divergência em relação a resposta da função.

Portanto, podemos perceber que os números complexos são utilizados em várias áreas do conhecimento, como ferramenta de apoio na resolução de problemas concretos.

2.2 – O uso dos números complexos nos livros didáticos

Ao analisarmos os livros didáticos, podemos notar que as propriedades gráficas, assim como algumas aplicações relevantes dos números complexos, não fazem parte da vida escolar dos alunos do Ensino Médio. O que encontramos, em geral, são apenas alguns teoremas associando números complexos com Geometria Analítica. Também podemos encontrar textos sobre os números complexos em apostilas e materiais didáticos disponibilizados na internet, contudo esses materiais se apresentam de maneira resumida e são acessados por um número restrito de pessoas, tais como: professores em cursos de formação, congressistas e alunos participantes das Olimpíadas de Matemática, vestibulandos do ITA e do IME.

Díaz (2011, p.61), considera que o livro didático é o mediador entre o currículo prescrito e o currículo praticado. Quanto a isto ele enfatiza que:

> Ao oferecer aos professores uma organização de conteúdos, um modelo didático de trabalho com esses conteúdos, atividades para os alunos desenvolverem e, em muitos casos, um manual para o professor, o livro didático se configura como um importante material na prática pedagógica, na medida em que ajuda a "clarear" parte significativa da atividade profissional diária, por exemplo, planejar as ações didático-curriculares a serem desenvolvidas em nas aulas. (Díaz, 2011, p.61)

Podemos notar que o autor considera que o livro didático é quem organiza de maneira eficiente os conhecimentos escolares, determinando inclusive o que deve ser ensinado e quando deve ser ensinado, o que deveria ser feito através de diretrizes governamentais ou através do planejamento dos professores.

Ao verificarmos os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática constatamos que os números complexos não estão inseridos neste documento como algo relevante. Veja como o tema é tratado no Guia de livros didáticos – PNLD 2012 – Matemática:

> Todas as coleções aprovadas incluem o estudo dos números complexos, em menor ou maior nível de aprofundamento. Considerar os números complexos como tópico obrigatório no ensino médio não é consenso entre os educadores. Muitos só os consideram indispensáveis para aqueles alunos que vão utilizar modelos matemáticos mais avançados em suas profissões. Por exemplo, engenheiros (ou técnicos nas áreas da Engenharia), físicos, matemáticos, entre outros. Mesmo nesses casos, é importante que o estudo dos complexos seja uma oportunidade privilegiada de articulação com tópicos como vetores e geometria no plano e com as equações algébricas. No entanto, nas coleções aprovadas isso não é levado em consideração (BRASIL, 2011, p. 28)

Talvez seja por isto que eles se ausentem dos livros didáticos. Não podemos esquecer que os números complexos possuem um vínculo com a Geometria Plana.

Os livros didáticos do Ensino Médio que apresentam capítulos dedicados aos números complexos deixam a desejar quanto ao surgimento destes números: ou não abordam a história do seu surgimento ou o relacionam com as equações algébricas de 2º grau ao invés do 3º grau.

> “Certamente os complexos não teriam sido criados se o motivo fosse esse: fazer com que todas as equações do segundo grau tivessem

solução. Por que não respeitar a história e mostrar que eles surgem para que se possa usar a Fórmula de Cardano no caso de a equação do terceiro grau ter três raízes reais? ” (Lima, 2001)

Este questionamento foi feito pelos professores Augusto César Morgado e Eduardo Wagner ao analisarem os livros de Matemática adotados pelas escolas brasileiras de Ensino Médio.

Para analisarmos os livros didáticos, escolhemos três deles utilizados no 3º ano do Ensino Médio e que foram publicados entre os anos de 2002 e 2005. As questões aqui abordadas se referem a maneira como são abordados os números complexos, os princípios e resultados obtidos pelos matemáticos e a relação destes números com o cotidiano do aluno.

Veja o quadro comparativo das obras de três editoras diferentes: Editora Positiva, Editora FTS e Editora Ática, todas com um bom conceito frente ao Ministério da Educação (MEC).

Quadro comparativo de livros didáticos sobre números complexos

Livros	**Matemática Ensino médio. Longen, Adilson. Editora: Positiva, 2005.3ª série do Ensino médio**	**Matemática Aula por Aula. Silva, Cláudio Xavier. Editora: FTS, 2005. 3ª série do Ensino médio.**	**Matemática. Sérgio, Marcondes Gentil. Editora: Ática, 2002. Série Novo Ensino médio**
Abordagem dos Números Complexos	Abordagem feita através da necessidade de se resolver equações do 3º grau	Não apresenta necessidade de se trabalhar com os números complexos; apresenta apenas as contribuições de alguns matemáticos para esse estudo	São abordados através da necessidade de se resolver equações do 2º grau, com $\Delta < 0$.
Apresentação dos Números Complexos	São apresentados na forma z=a+bi, com a, bϵR e i=√*-1*, e na forma trigonométrica.	São apresentados na forma de dois pares ordenados, (a, b) e (c, d), do produto cartesiano, R×R= {(x, y) /xϵR, yϵR}, onde R é o conjunto dos números reais, forma algébrica, trigonométrica e geométrica.	São apresentados na forma z=a+bi, com a, bϵR e i=√-1, sendo a a parte real (Re) e b a parte imaginária (Im). Também é feita a representação gráfica, além da forma trigonométrica ou polar.
Estudo epistemológico desses números	É feita uma apresentação do desenvolvimento dos estudos voltados a resolução de equações de 3º grau com raízes quadradas negativas.	Não apresenta um estudo crítico dos resultados obtidos pelos matemáticos, fazendo apenas o seu uso como correto.	Não faz um estudo crítico dos Números Complexos, apresentando apenas a forma algébrica como coerente.

Relação entre os Números Complexos e o cotidiano	Não faz relação entre os Complexos e o cotidiano, apresentando apenas abordagens algébricas, trigonométricas, não apresentando aplicações práticas.	Não faz relação entre os Complexos e o cotidiano, sendo feito apenas abordagens algébricas, trigonométricas e geométricas, sem dar ênfase às aplicações práticas.	Não é feita relação entre os Números Complexos e o cotidiano, apresentando apenas abordagens algébricas, geométricas e trigonométricas, sem aplicações práticas.

Por esta análise, podemos verificar que os livros de Adilson Longen (Ed. Positiva) e de Cláudio Silva (Ed. FTS), ambos publicados em 2005, abordam a Álgebra e a Trigonometria, mas apenas o primeiro autor é quem faz menção aos números complexos devido à necessidade de resolução de problemas de equações do 3º grau. O livro da Editora Ática, do autor Sérgio Marcondes, apresenta os Números Complexos devido às necessidades destes para a resolução das equações do 2º grau.

Quanto ao estudo científico dos livros, verificamos que em nenhum deles existe realmente o estudo crítico em relação aos números complexos. O livro de Claudio Silva até apresenta algumas contribuições de alguns matemáticos, mas nada aprofundado.

Por fim, analisamos a relação entre os números complexos e o cotidiano dos alunos. Chegamos à conclusão que nenhum dos livros analisados associa a aplicação destes com o cotidiano dos alunos. Adilson Longen aborda esses números apenas para resolver questões de equações do 3º grau, Sérgio Marcondes para resolver equações do 2º grau e, Cláudio Silva enfatiza apenas as contribuições de alguns matemáticos em relação a esses números.

CONCLUSÃO

Ao concluirmos este trabalho podemos entender que os números complexos são objeto de estudo de cientistas matemáticos desde a antiguidade. Tais números apareceram devido à necessidade de se estender o conceito de número real, que já este conceito não era mais suficiente para a resolução de problemas concretos que eram formulados matematicamente por equações algébricas de grau 2 e 3.

Os números complexos fazem parte das inúmeras abstrações matemáticas utilizadas para facilitar o cálculo e a resolução de vários problemas. Eles fazem parte de vários campos científicos e técnicos da Física, da Eletrônica, da Engenharia, dentre outros. São usados no desenrolar de problemas e ao se desejar extrair dados concretos para serem aplicados na realidade. Os números complexos não podem ser medidos com instrumento físico, podemos “medi-los” somente ao transpor o seu resultado para um número real.

Ao verificarmos a aplicação dos conceitos desses números nas salas de aula do Ensino Médio, percebemos que não são todos os livros didáticos que têm a preocupação de trabalhar com os alunos a história e a aplicação dos números complexos em problemas concretos.

Esperamos este trabalho venha provocar aos seus leitores uma nova visão em relação ao ensino dos números complexos no Ensino Médio, levando em consideração a história como ferramenta de apoio ao processo de ensino e aprendizagem desses números. Que novos surjam e tragam novas contribuições.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Editora Edgard Blücher: São Paulo, 1996.

BRASIL. MEC. SEF. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília, 1998

BRASIL. **Guia de livros didático – PNLD 2012 – Matemática**. Brasília, 2011. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guia-do-livro/item/2988- guia-pnld-2012-ensino-m%C3%A9dio>. Acesso em 20 abril 2016.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília (DF), 2007.

CHAGAS, Juliana S. B. A relevância do ensino de números complexos no ensino médio na opinião dos professores de matemática. UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO - UENF CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ AGOSTO DE 2013. Disponível no site: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/920/2011_00697. Acesso em 05-10-2016

DANTE, Luiz Roberto. **Contexto e aplicações**. Editora Ática: São Paulo, 2010

DÍAZ, O. R. T. **A atualidade do livro didático como recurso curricular**. Brasília: Linhas Críticas, v. 17, n. 34, p. 609-624, 2011.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Editora da Unicamp: Campinas, 2004.

GARBI, Gilberto Geraldo. **O romance das equações algébricas.** São Paulo: Makron Books, 1997.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. Livraria da Física: São Paulo, 2006.

Ishida, J. G. e outros. **Números Complexos.** Unicamp. Campinas, SP. 2014. Disponível no site:

http://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/NC2.pdf. Acesso em 10/06/2016

Leonard Euler. http://www.somatematica.com.br/coluna/gisele/08062004.php - Leonhard Euler . Acesso em 03/11/2016

LIMA, Elon Lages. Et al. **Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio**. IMPA/SBM. Rio de Janeiro, 2001.

____________. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** Graftex Comunicação Visual. Rio de Janeiro. P. 31-32. 1991

NEVES, R. C. **Os Quatérnios de Hamilton e o Espaço.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

PEDRESO, Hermes Antônio. **Uma Breve História da Equação de 2° Grau.** REMat, n°2, 2010.

SECCO, Fernando R.; ROCHA, Tatiane T. **Fractais**. Artigo disponível em <www.inf.ufsc.br> acessado em 02/04/2016.

Site: http://www.profcardy.com/cardicas/cardano.php - Acesso em, 04 de abril de 2016.

SOUZA, Joamir Roberto de**. Novo Olhar Matemática**. Editora FTD: São Paulo, 2010